

1) Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B, e C quaisquer:

I – A negação de  $x \in A \cap B$  é:  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ .

II –  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

III –  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Destas, é (são) falsas (s).

a) apenas I   b) apenas II   c) apenas III   d) apenas I e III   e) nenhuma.

**ALTERNATIVA E  
SOLUÇÃO IDEAL**

I – Para que  $x \notin A \cap B$ , não é necessário que  $x \notin A$  e  $x \notin B$ , simultaneamente. Basta um desses dois acontecimentos, ou seja:  $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Esta é uma das Relações de De Morgan. Item Verdadeiro.

II – Trata-se da propriedade distributiva da interseção em relação à união. Item verdadeiro.

III – Sejam  $X'$  o complemento de X e U o conjunto universo. Lembrando que uma das Leis de De Morgan afirma que  $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ , segue que:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A]' =$

$= [(A \cup B) \cap (B' \cup B)] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')] = [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B' \cup A')] = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Este item diz respeito a propriedade fundamental da diferença simétrica de conjuntos. Item verdadeiro.

Logo, nenhuma afirmação é falsa

2) Considere conjuntos A, B C R e  $C \subset (A \cup B)$ . Se  $A \cup B$ ,  $A \cap C$  e  $B \cap C$  são os domínios das funções reais definidas por

$\ln(x - \sqrt{\pi})$ ,  $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$  e  $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$ , respectivamente, pode-se afirmar que.

a)  $C = ]\sqrt{\pi}, 5[$    b)  $C = [2, \pi[$    c)  $C = [2, 5[$    d)  $C = [\pi, 4[$    e) C não é intervalo.

**ALTERNATIVA C  
SOLUÇÃO IDEAL**

i.  $x - \sqrt{\pi} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{\pi}$

ii.  $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$

iii.  $\frac{x-\pi}{5-x} \geq 0 \Rightarrow \pi \leq x < 5$

Assim:  $A \cup B = ]\sqrt{\pi}, +\infty[$

$A \cap C = [2, 4[$

$B \cap C = [\pi, 5[$

Desde que  $C \subset (A \cup B)$  então  $C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [2, 5[$

3) Se z é uma solução da equação em C,

$z - \bar{z} + |z|^2 = - \left[ (\sqrt{2} + i) \left( \frac{\sqrt{2}-1-i}{3} - i \frac{\sqrt{2}+1}{3} \right) \right]^{12}$ , pode-se afirmar que

a)  $i(z - \bar{z}) < 0$    b)  $i(z - \bar{z}) > 0$    c)  $|z| \in [5, 6[$    d)  $|z| \in [6, 7[$    e)  $\left| z + \frac{1}{z} \right| > 8$

**ALTERNATIVA E  
SOLUÇÃO IDEAL**

$z - \bar{z} + |z|^2 = - \left\{ \frac{1}{3} [(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - 1 - i\sqrt{2} - i)] \right\}^{12}$ . Efetuando o produto do segundo membro, obtém-se:  $-(1-i)^{12}$

Como  $1-i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \rightarrow (1-i)^{12} = \left[ \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \right]^{12} = 2^6 \operatorname{cis} 21\pi = -64$

Daí:  $z - \bar{z} + |z|^2 = 64$ . Fazendo  $Z = a + bi$ , com a e b reais:  $(a + bi) - (a - bi) + a^2 + b^2 = 64$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 64 \\ 2b = 0 \end{cases} \rightarrow a = \pm 8 \Rightarrow Z = \pm 8 \Rightarrow \left| z + \frac{1}{z} \right| > 8$

4) Os argumentos principais das soluções da equação em z,

$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0$ ,

pertencem a

a)  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$    b)  $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[$    c)  $\left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$    d)  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right[$    e)  $\left] 0, \frac{\pi}{4} \right[ \cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right[$

**ALTERNATIVA C  
SOLUÇÃO IDEAL**

Fazendo  $z = a + bi$ , com a e b reais:  $a \cdot i - b + 3a - 3bi + a^2 + 2abi - b^2 + 2a^2 + 2b^2 + a^2 - 2abi - b^2 - i = 0$ .

Portanto, tem-se que:  $(4a^2 + 3a - b) + (a - 3b - 1)i = 0$ , implica

$$\begin{cases} 4a^2 + 3a - b = 0 \\ a - 3b - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow b = \frac{1}{3}(a-1) \text{ . Substituído na equação 1:}$$

$$12a^2 + 8a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \rightarrow b = -\frac{7}{18} \rightarrow z_1 = -\frac{1}{6} - \frac{7}{18}i; \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Portanto:  $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$  e  $\arg(z_1) = \pi + \arctg\left(\frac{7}{3}\right)$ . Assim, conclui-se que:  $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z_1) < \frac{3\pi}{2}$

5) Considere a progressão aritmética  $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$  de razão  $d$ . Se  $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$  e  $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$ , então  $d - a_1$  é igual a

- a) 3    b) 6    c) 9    d) 11    e) 14

**ALTERNATIVA D  
SOLUÇÃO IDEAL**

Soma da PA:  $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d \Rightarrow \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10 + 25d \text{ que leva a: } a_1 + 2d = 1 \text{ (eq.1)}$$

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550 \Rightarrow \frac{(2a_1 + 49d) \cdot 50}{2} = 4550 \Rightarrow 2a_1 + 49d = 182 \text{ (eq.2)}$$

Tem-se o sistema:  $\begin{cases} a_1 + 2d = 1 \\ 2a_1 + 49d = 182 \end{cases} \rightarrow a_1 = -7 \text{ e } d = 4. \text{ Logo, } d - a_1 = 4 - (-7) = 11$

6) Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f$  é par e  $g$  é ímpar. Das seguintes afirmações:

I -  $f \cdot g$  é ímpar,

II -  $f \circ g$  é par,

III -  $g \circ f$  é ímpar,

É (são) verdadeira(s)

- a) apenas I    b) apenas II    c) apenas III    d) apenas I e II    e) Todas.

**ALTERNATIVA D  
SOLUÇÃO IDEAL**

I. Se  $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x) \cdot g(x) = -h(x) \Rightarrow h$  é ímpar ITEM VERDADEIRO

II. Se  $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x) \Rightarrow h$  é par  $\Rightarrow$  ITEM VERDADEIRO

III. Se  $h(x) = g(f(x)) \Rightarrow h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x) \Rightarrow h$  é par  $\Rightarrow$  ITEM FALSO

7) A equação em  $x$ ,

$$\arctg(e^x + 2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo  $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução,

**ALTERNATIVA B  
SOLUÇÃO IDEAL**

A equação dada é idêntica a:  $\arctg(e^x + 2) - \arctg\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right) = \frac{\pi}{4}$

Aplicando a tangente da diferença:  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = 1 \Rightarrow \frac{(e^x + 2) - \frac{(e^{2x} - 1)}{e^x}}{1 + (e^x + 2) \frac{(e^{2x} - 1)}{e^x}} = 1$

Chamando  $e^x = y > 0$ , tem-se: 
$$\frac{(y+2) - \frac{(y^2-1)}{y}}{1 + \frac{(y+2)(y^2-1)}{y}} = 1 \rightarrow \frac{y^2 + 2y - y^2 + 1}{y + (y+2)(y^2-1)} = 1 \Rightarrow$$

$$y^3 + 2y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 + y - 3) = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ e } y_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$$

Como  $y > 0$ , a única solução será  $y = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \cong 1,3 \rightarrow e^x = 1,3 \rightarrow x > 0$

Logo, há uma única solução, que é positiva.

**8)** Sabe-se que o polinômio  $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , admite a raiz  $-i$ . Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de  $p$ :

I – Quatro das raízes são imaginárias puras.

II – Uma das raízes tem multiplicidade dois

III – Apenas uma das raízes é real

Desta, é (são) verdadeira(s) apenas

a) I      b) II      c) III      d) I e III      e) II e III.

**ALTERNATIVA C  
SOLUÇÃO IDEAL**

Uma vez que  $-i$  é raiz e todos os coeficientes de  $p(x)$  são reais, tem-se que  $i$  também é raiz de  $p(x)$ .

Substituindo  $x = i$  tem-se que:  $i^5 - a.i^3 - a.i^2 - 1 = 0 \Rightarrow i + a.i - a - 1 = 0 \Rightarrow -(a+1) + i(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$

Logo,  $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ .

É possível identificar que  $p(x)$  é um polinômio recíproco de 2ª ordem e grau ímpar, implicando que  $1$  é raiz de  $p(x)$ .

Sejam  $r$  e  $s$  as outras duas raízes de  $p(x)$ . Pelas relações de Girard:

$$r + s + 1 + i - i = 0 \Rightarrow r + s = -1 \Rightarrow s = -1 - r \quad (1)$$

$$r.s.1.i.(-i) = 1 \Rightarrow r.s = 1 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):  $r(-1-r) = 1 \Rightarrow r^2 + r + 1 = 0$

Se  $r = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  então  $s = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

Se  $r = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  então  $s = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

Logo, as raízes de  $p(x)$  são  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,  $1$ ,  $i$  e  $-i$ .

Portanto, as afirmações I e II estão incorretas, enquanto que a afirmação III está correta.

**9)** Um polinômio real  $p(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$ , com  $a_5 = 4$ , tem três raízes reais distintas,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidades dois, pode-se afirmar que  $p(1)$  é igual a

a) -4      b) -2      c) 2      d) 4      e) 6

**ALTERNATIVA A  
SOLUÇÃO IDEAL**

Escalonando o sistema obtém-se:

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2b - 3c = 6 \\ -2b - 8c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2b - 3c = 6 \\ -11c = 11 \end{cases} \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 3/2 \Rightarrow a = 2$$

Logo,  $p(x) = 4(x-2)^2(x+1)^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow p(1) = -4$

**10)** Considere o polinômio  $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$  com coeficiente  $a_0 = -1$  e  $a_n = 1 + i a_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 15$ . Das afirmações:

I.  $p(-1) \notin \mathbb{R}$ ,      II.  $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ ,      III.  $a_8 = a_4$ ,  
é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III.

**ALTERNATIVA E  
SOLUÇÃO IDEAL**

Seja  $P(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$  com  $a_0 = -1$  e  $a_n = 1 + ia_{n-1}$ ;  $n = 1, 2, \dots, 15$ . Então:

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 1 - i \quad a_2 = 1 + i(1 - i) = 2 + i \quad a_3 = 1 + i(2 + i) = 2i \quad a_4 = 1 + 2i \cdot i = -1 \quad \dots$$

Logo  $a_{4k+p} = a_p$ , com  $k$  e  $p$  naturais. Assim:  $P(x) = [-1 + (1 - i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3] \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12})$

Portanto:

I - Falsa

$$P(-1) = [-1 + (1 - i)(-1) + (2 + i)(-1)^2 + 2i(-1)^3] \cdot [1 + (-1)^4 + (-1)^8 + (-1)^{12}] \Rightarrow P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) \in \mathbb{R}$$

II - Verdadeira

$$|P(x)| = |-1 + 2ix^3 + (1 - i)x + (2 + i)x^2| \cdot |1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \Rightarrow$$

$$|P(x)| \leq [|-1 + 2ix^3| + |(1 - i)x| + |(2 + i)x^2|] \cdot |1 + x^4 + x^8 + x^{12}|$$

$$\text{Para } x \in [-1, 1], \text{ tem-se que: } |-1 + 2ix^3| \leq 3 \quad |(1 - i) \cdot x| \leq \sqrt{2} \quad |(2 + i)x^2| \leq \sqrt{5} \quad |1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 4$$

$$\text{Logo: } |P(x)| \leq (3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot 4$$

III - Verdadeira

Como visto anteriormente:  $a_{4k+p} = a_p$ . Tomando  $P = 4$  e  $k = 1$ , tem-se:  $a_8 = a_4 = -1$

11) A expressão  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$  é igual a

- a)  $2630\sqrt{5}$     b)  $2690\sqrt{5}$     c)  $2712\sqrt{5}$     d)  $1584\sqrt{15}$     e)  $1604\sqrt{15}$

**ALTERNATIVA B  
SOLUÇÃO IDEAL**

Podemos observar que o desenvolvimento em binômio de Newton de  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5$  e  $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$  possuem os termos de ordem ímpar iguais e os termos de ordem par com sinais contrários. Assim,  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$  é igual a duas vezes a soma dos termos de ordem par de  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5$ :

$$(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5 = 2 \left[ \binom{5}{1} (2\sqrt{3})^4 (\sqrt{5}) + \binom{5}{3} (2\sqrt{3})^2 (\sqrt{5})^3 + \binom{5}{5} (\sqrt{5})^5 \right] \Rightarrow$$

$$(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5 = 2 [720\sqrt{5} + 600\sqrt{5} + 25\sqrt{5}] = 2690\sqrt{5}$$

12) Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente do modo que, para cada um dos refletores, seja de  $\frac{2}{3}$  a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

- a)  $\frac{16}{27}$     b)  $\frac{49}{81}$     c)  $\frac{151}{243}$     d)  $\frac{479}{729}$     e)  $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$

**ALTERNATIVA A  
SOLUÇÃO IDEAL**

Pelo teorema da probabilidade binomial:

$$\binom{6}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{15 \cdot 2^4}{3^6} + \frac{6 \cdot 2^5}{3^6} = \frac{16}{27}$$

13) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

Em que  $a_4 = 10$ ,  $\det A = -1000$  e  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$ , formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão  $d > 0$ .

Pode-se afirmar que  $\frac{a_1}{d}$  é igual a.

- a) -4    b) -3    c) -2    d) -1    e) 1

**ALTERNATIVA D  
SOLUÇÃO IDEAL**

Det A = - 1000  $\Rightarrow a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 = - 1000 \Rightarrow a_1 \cdot a_6 = -100$  assim, para  $d > 0$ , temos: 
$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_6 = a_1 + 5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = a_1 + 3d \\ \frac{-100}{a_1} = a_1 + 5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a_1 = -5 \end{cases}$$

Logo:  $\frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} = -1$

14) Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Sabe-se que  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 de soma 80 e 255, respectivamente. Então,  $\det(A^{-1})$  e o elemento  $(A^{-1})_{23}$  valem, respectivamente,

- a)  $\frac{1}{72}e^{12}$       b)  $-\frac{1}{72}e^{-12}$       c)  $-\frac{1}{72}e^{12}$       d)  $-\frac{1}{72}e^{\frac{1}{12}}$       e)  $\frac{1}{72}e^{\frac{1}{12}}$

**ALTERNATIVA C  
SOLUÇÃO IDEAL**

$$x_1 + 3x_1 + 9x_1 + 27x_1 = 80 \Rightarrow 40x_1 = 80 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$y_1 + 4y_1 + 16y_1 + 64y_1 = 255 \Rightarrow 85y_1 = 255 \Rightarrow y_1 = 3$$

Portanto:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (-1)^{4+1}(1)(6 \cdot 48 \cdot 1 - 1 \cdot 12 \cdot 18) = -72$

Como  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$  então  $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{72}$ .

Logo:  $(A^{-1})_{23} = \det(A^{-1}) \cdot \text{Adj}(A)_{23} \Rightarrow (A^{-1})_{23} = -\frac{1}{72}(-1)^{3+2}(18 \cdot 192 \cdot 1 - 1 \cdot 48 \cdot 54) = 12$

15) O valor da soma  $\sum_{n=1}^6 \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , é igual a

- a)  $\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos \alpha \right]$       b)  $\frac{1}{2} \left[ \text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right) \right]$       c)  $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$   
 d)  $\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) \right]$       e)  $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos \alpha$

**ALTERNATIVA A  
SOLUÇÃO IDEAL**

Tem-se que  $\text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)}{2}$ .

Então  $\sum_{n=1}^6 \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \cos \alpha + \cos\left(\frac{\alpha}{9}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \dots + \cos\left(\frac{\alpha}{81}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{27}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{81}\right) \right] =$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos \alpha \right]$ .

16) Se os números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}, 0 \leq \alpha \leq \beta$ , maximizam a soma  $\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta$ , então  $\alpha$  é igual a

- a)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$       b)  $\frac{2\pi}{3}$       c)  $\frac{3\pi}{5}$       d)  $\frac{5\pi}{8}$       e)  $\frac{7\pi}{12}$

**ALTERNATIVA B  
SOLUÇÃO IDEAL**

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sqrt{3} \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Uma vez que o valor máximo de um cosseno é 1, tem-se que:

$$\cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = 2k\pi \Rightarrow \alpha - \beta = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $0 \leq \alpha \leq \beta$  e  $\alpha + \beta = 4\pi/3$ , a única possibilidade é  $k = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 2\pi/3$

**17)** Considere as circunferências  $C_1 : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$  e  $C_2 : (x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9$ . Seja  $r$  uma reta tangente interna a  $C_1$  e  $C_2$ , isto é,  $r$  tangencia  $C_1$  e  $C_2$  e intercepta o segmento de reta  $\overline{O_1O_2}$  definido pelos centros  $O_1$  de  $C_1$  e  $O_2$  de  $C_2$ . Os pontos de tangência definem um segmento sobre  $r$  que mede

- a)  $5\sqrt{3}$     b)  $4\sqrt{5}$     c)  $3\sqrt{6}$     d)  $\frac{25}{3}$     e) 9

**ALTERNATIVA A  
SOLUÇÃO IDEAL**

Sejam:  $C_1: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \Rightarrow r_1 = 2$      $C_2: (x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 3^2 \Rightarrow r_2 = 3$

e  $O$  o ponto de intersecção de  $r$  e  $O_1O_2$ , com:  $\overline{O_1O_2} = 10$ ;  $\sqrt{(10-4)^2 + (11-3)^2} = 10 \Rightarrow \overline{O_1O} + \overline{OO_2} = 10$     (1)

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  os pontos de intersecção de  $r$  com as circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente.

Então:  $\frac{\overline{O_1T_1}}{\overline{O_1O}} = \frac{\overline{O_2T_2}}{\overline{O_2O}} \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{O_1O}} = \frac{3}{\overline{O_2O}}$     (2)

De (1) e (2), temos  $\overline{O_1O} = 4$  e  $\overline{OO_2} = 6$ .

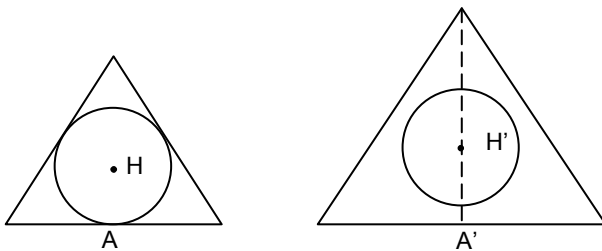
Logo, dos triângulos retângulos  $OO_1T_1$  e  $OO_2T_2$ , obtemos:  $\overline{T_1O} = 2\sqrt{3}$  e  $\overline{T_2O} = 3\sqrt{3}$ . Assim:  $\overline{T_1T_2} = 5\sqrt{3}$

**18)** Um cilindro reto de altura  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3cm, o volume do cilindro, em  $\text{cm}^3$ , é igual a .

- a)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$     b)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$     c)  $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$     d)  $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$     e)  $\frac{\pi}{3}$

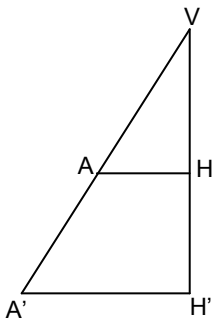
**ALTERNATIVA D  
SOLUÇÃO IDEAL**

Sejam as figuras 1 e 2, seções planas que contêm as bases do cilindro:



$$A'H' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos obter o triângulo retângulo abaixo, onde:



V: vértice do tetraedro

$\overline{AH}$ : raio da base do cilindro

$$\overline{VH'}: \text{altura do tetraedro} \Rightarrow \overline{VH'} = \frac{3\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$\overline{HH'}$ : altura do cilindro

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{VH}}{\overline{VH'}} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = r \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot \overline{HH'} = \pi \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}$$

**19)** Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo B = (2, 1) e C = (5, 5). Das seguintes afirmações:

I – A se encontra sobre a reta  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$ ,

II - A está na intersecção da reta  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$  com a circunferência  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ,

III - A pertence às circunferências  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$  e  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{75}{4}$ , e (são) verdadeira(s) apenas

- a) I      b) II      c) III      d) I e II      e) II e III

**ALTERNATIVA E  
SOLUÇÃO IDEAL**

1) Determinando o ponto médio de  $\overline{BC}$  :  $x_{BC} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7}{2}$      $y_{BC} = \frac{y_B + y_C}{2} = 3$

Chamando o ponto médio de P,  $P = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$ .

2) Calculando o lado do triângulo equilátero

$\ell = d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 5$  logo, a altura do triângulo equilátero:  $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) Calculando o coeficiente angular da reta BC:  $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5 - 1}{5 - 2} \rightarrow m_{BC} = \frac{4}{3}$

Como a mediatriz é perpendicular a BC:  $m \cdot m_{BC} = -1 \rightarrow m = \frac{1}{4/3} \rightarrow m = -\frac{3}{4}$

A equação da mediatriz será:  $y - y_A = m(x - x_P) \rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{2}\right) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$

Quantos às afirmativas:

(I) O vértice A se encontra sobre a mediatriz de BC, cuja equação é  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$

Logo a afirmativa I é falsa

(II) O vértice A está na intersecção da mediatriz de BC,  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ , e a circunferência com centro em B e raio igual ao comprimento do lado do triângulo equilátero, cuja equação será  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Logo (II) é verdadeira.

III - O vértice A se encontra na intersecção da circunferência com centro no ponto inêdico de BC e raio igual à altura do triângulo cuja equação é  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{75}{4}$  com a circunferência com centro em C e raio igual ao lado do triângulo, cuja equação será  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Logo a assertiva (III) é verdadeira.

**20)** Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cuja arestas medem 1cm Se M é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  e N é o ponto médio do segmento  $\overline{CD}$ , então a área do triângulo MND, em  $\text{cm}^2$ , é igual a

- a)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$       b)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$       c)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

**ALTERNATIVA B  
SOLUÇÃO IDEAL**

Como  $\overline{MN}$  é perpendicular comum às arestas opostas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , a área pedida é dada por  $\frac{MN \cdot ND}{2}$

Já que  $ND = \frac{1}{2}$  cm e  $MD = \frac{\sqrt{3}}{2}$  cm, tem-se que:  $MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Logo, A área procurada é:  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$

**21)** Sejam A, B e C conjuntos tais que  $C \subset B$ ,  $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$ ,  $n(A \cup B) = 22$  e  $(n(C), n(A), n(B))$  é uma progressão geométrica de razão  $r > 0$ .

- a) Determine  $n(C)$   
b) Determine  $n(P(B \setminus C))$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

Sabe-se que: 
$$\begin{cases} n(B \setminus C) = 6n(A \cap B) \\ n(B \cap C) = 2n(A \cap B) = n(C) \text{ (pois } C \subset B) \\ n(A \cup B) = 22 \end{cases}$$

Como  $(B \setminus C) \cup (B \cap C) = B$  e  $(B \setminus C) \cap (B \cap C) = \emptyset$ , conclui-se que:  $n(B) = n(B \setminus C) + n(B \cap C) = 8n(A \cap B)$

Uma vez que  $(n(C), n(A), n(B))$  é uma PG de razão  $r > 0$ , tem-se que:

$n(B) = r^2 \cdot n(C) \Rightarrow 8n(A \cap B) = r^2 \cdot 2n(A \cap B) \Rightarrow r = 2$  ou  $n(A \cap B) = 0$  (não convém, pois  $n(C) = 0$  e  $n(B \setminus C) = 0$  implicariam  $n(B) = 0$ . Daí,  $(0, 22, 0)$  não seria PG). Assim, deve-se impor que:

$(n(A), n(B), n(C)) = (2n(C), 4n(C), n(C))$ , bem como  $n(C) = 2 \cdot n(A \cap B)$ . Logo:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Leftrightarrow 2n(C) + 4n(C) - \frac{n(C)}{2} = 22 \Leftrightarrow n(C) = 4$$

b) A partir da solução do item anterior, conclui-se que:  $n(B \setminus C) = 6n(A \cap B) = 3n(C) = 12$ .

Portanto:  $n(P(B \setminus C)) = 2^{n(B \setminus C)} = 2^{12} = 4096$

**22)** A progressão geométrica infinita  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  tem razão  $r < 0$ . Sabendo-se que a progressão infinita  $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$  tem soma 8 e a progressão infinita  $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$  tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

**SOLUÇÃO IDEAL**

Se  $r$  é a raiz da PG então  $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Na progressão  $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$  tem-se:  $\frac{a_{5n+6}}{a_{5n+1}} = \frac{a_1 r^{5n+5}}{a_1 r^{5n}} = r^5$ , ou seja, esta progressão é uma PG de razão  $r^5$ .

Na progressão  $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$  tem-se:  $\frac{a_{5n+5}}{a_{5n}} = \frac{a_1 r^{5n+4}}{a_1 r^{5n-1}} = r^5$ , ou seja, esta progressão também é uma PG de razão  $r^5$ .

Assim: 
$$\begin{cases} 8 = \frac{a_1}{1-r^5} \\ 2 = \frac{a_5}{1-r^5} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Deste modo:  $a_1 = 8(1-r^5) = 8 \left[ 1 - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 \right] = 8 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) = 8 + \sqrt{2}$

Portanto:  $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{8 + \sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(8 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2(8 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{2(16 - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2)}{4 - 2} = 14 - 6\sqrt{2}$

**23)** Analise a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$  é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa  $f^{-1}$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

i) Analise se  $f$  é injetora: Suponha que  $f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{3^a - 3^{-a}}{2} = \frac{3^b - 3^{-b}}{2} \Rightarrow 3^a - 3^b - \frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} = 0 \Rightarrow$

$$3^a - 3^b + \frac{(3^a - 3^b)}{3^a 3^b} = 0 \Rightarrow (3^a - 3^b) \left( 1 + \frac{1}{3^{a+b}} \right) = 0$$

1ª possibilidade:  $3^a = 3^b \Rightarrow a = b$

2ª possibilidade:  $1 + \frac{1}{3^{a+b}} = 0 \Rightarrow 3^{a+b} = -1$  que não possui soluções reais

Assim, a única possibilidade para  $f(a) = f(b)$  é  $a = b$ , que caracteriza uma função injetora.

ii) Analise se  $f$  é sobrejetora: Seja  $f(a) = b \Rightarrow \frac{3^a - 3^{-a}}{2} = b \Rightarrow 3^a - \frac{1}{3^a} = 2b \Rightarrow (3^a)^2 - (2b)3^a - 1 = 0 \Rightarrow$

$$3^a = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4}}{2} \Rightarrow 3^a = b \pm \sqrt{b^2 + 1}, \text{ como } 3^a > 0 \text{ deve-se ter } 3^a = b + \sqrt{b^2 + 1} \Rightarrow a = \log_3(b + \sqrt{b^2 + 1})$$

Para  $b \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $\log_3(b + \sqrt{b^2 + 1})$  percorre todos os números reais, fazendo com que  $f(x)$  seja sobrejetora.

iii) Determinação de  $f^{-1}$ : O procedimento de determinar  $f^{-1}$  é o mesmo da análise se  $f$  é sobrejetora, bastando fazer  $a = y$  e  $b = x$ . Logo,  $f^{-1}(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$

**24)** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijetora é ímpar. Mostre que a função inversa  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também é ímpar.

**Solução Ideal**

Deve-se provar que  $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y), \forall y \in \mathbb{R}$ .

De fato, seja  $y \in \mathbb{R}$ . Então, pode-se escrever  $y = f(x)$ , ou ainda,  $x = f^{-1}(y)$ , com  $x$  real determinado, já que  $f$  é bijetiva e, portanto, inversível. Daí, tem-se que  $-f^{-1}(y) = -x$  (I).

Além disso:  $y = f(x) \Leftrightarrow -y = -f(x) = f(-x)$  (pois  $f$  é ímpar)  $\Leftrightarrow -x = f^{-1}(-y)$  (II).

Finalmente, de (I) e (II), conclui-se que:  $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ , isto é, que  $f^{-1}$  é ímpar.

**25)** Considere o polinômio  $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$ , com coeficiente reais, sendo  $a_0 \neq 0$  e  $a_6 = 1$ . Sabe-se que se  $r$  é raiz de  $p$ ,  $-r$

também é raiz de  $p$ . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I – Se  $r_1$  e  $r_2, |r_1| \neq |r_2|$ , são raízes reais e  $r_3$  é raiz não real de  $p$ , então  $r_3$  é imaginário puro.

II – Se  $r$  é raiz dupla de  $p$ , então  $r$  é real ou imaginário puro.

III –  $a_0 < 0$

**SOLUÇÃO IDEAL**

I. Se  $p(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  e  $a_0 \neq 0$ , então todas as raízes de  $p(x)$  são não nulas. Logo, se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes reais de  $p(x)$  com  $|r_1| \neq |r_2|$  então tem-se que  $r_1 \neq \pm r_2$ , fazendo com que as raízes de  $p(x)$  sejam da forma  $r_1, r_2, r_3, -r_1, -r_2$  e  $-r_3$ . Como  $r_3$  é raiz não real, então é da forma  $r_3 = a + bi, b \neq 0$ . Desde que os coeficientes de  $p(x)$  são todos reais, então as raízes complexas devem ser, aos pares, conjugadas. Como as únicas raízes complexas são  $r_3$  e  $-r_3$ :

$r_3 = -r_3 \Rightarrow a + bi = -a + bi \Rightarrow a = 0 \Rightarrow r_3$  é imaginário puro  $\Rightarrow$  ITEM VERDADEIRO

II. Qualquer polinômio cujas raízes sejam da forma  $r, r, \bar{r}, \bar{r}, -r$  e  $-\bar{r}$ , onde  $r$  é da forma  $a + bi$ , com  $b \neq 0$ , satisfaz o enunciado da questão e  $r$  não é nem real e nem imaginário puro. Por exemplo, o polinômio cujas raízes são  $1 + i, 1 + i, 1 - i, 1 - i, -1 - i, -1 - i$  possui raiz dupla, satisfaz o fato de  $r$  e  $-r$  serem raízes de  $p$  e também os coeficientes de  $p$  serem reais.

ITEM FALSO

III. O polinômio que possui as raízes do item II possui  $a_0 = (1 + i)(1 + i)(1 - i)(1 - i)(-1 - i)(-1 - i) = 8 > 0$ . ITEM FALSO

**26)** Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, repô-la, retirada-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

**SOLUÇÃO IDEAL**

$$a) p = \frac{n(5) + n(6) - n(5 \cap 6)}{n(\Omega)} = \frac{\lfloor \frac{90}{5} \rfloor + \lfloor \frac{90}{6} \rfloor - \lfloor \frac{90}{30} \rfloor}{90} = \frac{18 + 15 - 3}{90} = \frac{1}{3}$$

b) Sejam os eventos:

A: o 1º número retirado é múltiplo de 6

B: o 2º número retirado não é múltiplo de 6, sem o 1º retirado múltiplo de 6

C: o 2º número retirado não é múltiplo de 6, sem o 1º retirado não múltiplo de 6

$$\text{Assim, a probabilidade pedida vale: } p = p(A) \cdot p(B) + p(A^C) \cdot p(C) = \frac{15}{90} \cdot \frac{89-14}{89} + \frac{(90-15)}{90} \cdot \frac{(89-15)}{89} = \frac{6675}{8010} = \frac{5}{6}$$

**27)** Considere as matrizes  $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  e  $X, B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

a) Encontre todos os valores reais de  $a$  e  $b$  tais que a equação matricial  $AX = B$  tenha solução única.

b) Se  $a^2 - b^2 = 0, a \neq 0$  e  $B = [1 \ 1 \ 2 \ 4]^t$ , encontre  $x$  tal que  $AX = B$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

a) Basta aplicar a regra de Cramer. Desenvolvendo  $\det A$  pela 3ª linha, conforme o teorema de Laplace, obtém-se que:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2a^2 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0.$$

Assim, para que o sistema linear correspondente à equação matricial dada tenha única solução, é necessário e suficiente que  $a \neq 0$  ( $b$  real qualquer)

b) Com  $a^2 - b^2 = 0$ , tem-se o seguinte escalonamento da matriz completa associada ao sistema linear:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -a & 2 & b & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} aL_2-bL_1 \\ L_4+L_1 \end{smallmatrix}]{a^2-b^2=0} \begin{pmatrix} a & 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 & -b & a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2b & 2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + bz + w = 1 \\ = 1 \\ bz + w = 1 \\ -bw = 0 \end{cases} \text{ . Portanto: } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/a \\ 1 \\ 1/b \\ 0 \end{bmatrix}$$

**28)** Considere a equação  $(3 - 2\cos^2 x) (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$

- a) Determine todas as soluções  $x$  no intervalo  $[0, \pi[$   
 b) Para as soluções encontradas em a), determine  $\operatorname{cotg} x$

**1ª SOLUÇÃO IDEAL**

$$[3 - 2(1 - \sin^2 x)] \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 6 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \Rightarrow 2\sin^2 x + 1 = 6\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \Rightarrow 2\sin^2 x + 1 = 3\sin x \Rightarrow$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \sin x = 1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

i.  $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$  no intervalo  $[0, \pi[$  existe apenas a raiz  $x = \frac{\pi}{2}$   
 ii.  $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ou  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow$  no intervalo  $[0, \pi[$  existem apenas as raízes  $x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = \frac{5\pi}{6}$   
 b) i)  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = 0$ ; ii)  $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ ; iii)  $x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

**2ª SOLUÇÃO IDEAL**

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x = 1 - \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\text{Logo: } 3 - 2\cos^2 x = 3 - 2 \left( \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2 - 2(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2} = \frac{1 + 10\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2}$$

Substituindo este último resultado na equação:

$$\frac{(1 + 10\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2})}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1 + 10\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - 6\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + 10\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$$

Notando que  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$  é raiz desta equação, pelo algoritmo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 10 & -6 & 1 \\ & & 1 & -5 & 5 & -1 \\ \hline & 1 & -5 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

Assim, o quociente fica da forma  $\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - 5\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 5\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$ . Pode-se observar que  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$  é raiz desta última equação.

aplicando mais uma vez o algoritmo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

Portanto, a equação original fica reduzida a  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$  ou  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

Uma vez que  $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ , então tem-se que:

i) Se  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$  então  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;      ii) Se  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$  então  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Analisemos agora todas as soluções no intervalo  $[0, \pi]$ .

i)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$  no intervalo  $[0, \pi[$  existe apenas a raiz  $x = \frac{\pi}{2}$

ii)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow$  no intervalo  $[0, \pi[$  existe apenas a raiz  $x = \frac{\pi}{6}$

iii)  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow$  no intervalo  $[0, \pi[$  existe apenas a raiz  $x = \frac{5\pi}{6}$

b) Desde que  $\operatorname{cotg} x$  é o inverso de  $\operatorname{tg} x$ :

i)  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = 0$ ; ii)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ ; iii)  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

**29)** Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são  $A = (1, 1)$ ,  $B = (1, 7)$  e  $C = (5, 4)$  no plano  $xOy$ .

**1ª SOLUÇÃO IDEAL**

Sejam  $ABC$  o triângulo de vértices  $A(1, 1)$ ,  $B(1, 7)$  e  $C(5, 4)$  com  $AB = 6$ ,  $BC = 5$  e  $AC = 5$ . Então  $ABC$  é isósceles de base  $AB$ . Logo, o ponto  $M(1, 4)$ , ponto médio de  $AB$ , pertence à circunferência  $\lambda$  inscrita ao triângulo  $ABC$  e a mediatriz  $m: y = 4$  ao segmento  $AB$  contém o centro de  $\lambda$ , ou seja,  $O(x_0, 4)$ . Seja  $r$  a reta suporte a  $AC$  e  $s$  suporte a  $AB$ , temos:

$r: \frac{x - x_a}{y - y_a} = \frac{x - x_c}{y - y_c} \Rightarrow \frac{x - 1}{y - 1} = \frac{x - 5}{y - 4} \Rightarrow 4y - 3x - 1 = 0$

$s: x - 1 = 0$

Para  $O(x_0, 4)$ , centro de  $\lambda$ , temos:

$d_{or} = d_{os} \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 4 - 3x_0 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|x_0 - 1|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow 16 - 3x_0 - 1 = \pm(5x_0 - 5) \Rightarrow x_0 = 2,5$  ou  $x_0 = -5$  (não convém)

Assim, sendo  $x_0 = 2,5$  tem-se  $r = 1,5$ . Logo:  $\lambda: (x - 2,5)^2 + (y - 4)^2 = 1,5^2$

**2ª SOLUÇÃO IDEAL**

Calculando os comprimentos dos lados do triângulo encontra-se  $c = AB = 6$ ,  $b = AC = 5$  e  $a = BC = 5$

Assim:  $2p = AB + AC + BC = 16 \Rightarrow p = 8$

Logo:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12$

Portanto, o raio da circunferência inscrita pode ser calculado da seguinte maneira:  $S = p \cdot r \Rightarrow 12 = 8r \Rightarrow r = 3/2$

Sabe-se que as coordenadas do incentro  $I = (x_1, y_1)$  de um triângulo  $ABC$  são calculadas a partir das expressões

$x_1 = \frac{a \cdot x_A + b \cdot x_B + c \cdot x_C}{a + b + c}$  e  $y_1 = \frac{a \cdot y_A + b \cdot y_B + c \cdot y_C}{a + b + c}$ .

Portanto:  $x_1 = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 5}{5 + 5 + 6} = \frac{5}{2}$  e  $y_1 = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4}{5 + 5 + 6} = 4$

Desta forma, a circunferência inscrita em  $ABC$  possui equação:  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$

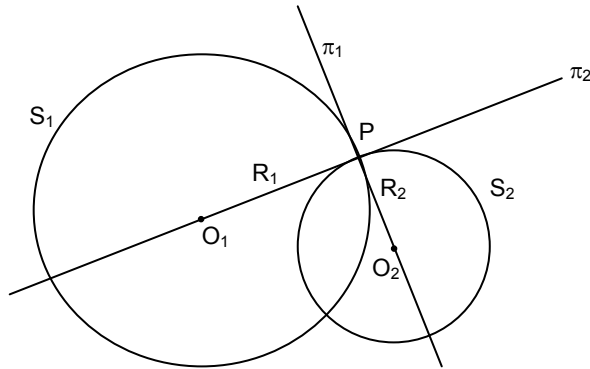
**30)** As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem  $2\text{cm}$  e  $\frac{2}{3}\text{cm}$ , respectivamente, calcule

- a) a distância entre os centros das duas esferas
- b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

**SOLUÇÃO IDEAL**

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  as superfícies esféricas consideradas. Considere-se um ponto  $P$  em  $S_1 \cap S_2$  e os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  respectivamente tangentes a  $S_1$  e a  $S_2$  por  $P$ .

A seção reta de qualquer dos diedros formados por  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , passando por  $P$ , passa também pelos centros de  $S_1$  e  $S_2$ ,  $O_1$  e  $O_2$ , nesta ordem. Gera-se, assim, o corte representado a seguir:



a) Como o ângulo  $O_1\hat{P}O_2$  é reto, tem-se pelo Teorema de Pitágoras que:

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \text{ cm, que é a distância entre os centros.}$$

b) Considerando-se as esferas limitadas por  $S_1$  e  $S_2$ , a área pedida corresponde à soma das áreas de duas calotas esféricas, uma em cada superfície esférica dada.

Utilizando as notações do item anterior, seja  $\overline{PH}$  a altura relativa à hipotenusa no triângulo  $PO_1O_2$ , com H em  $\overline{O_1O_2}$ .

$$\text{Então: } O_1P^2 = O_1H \cdot O_1O_2 \Rightarrow O_1H = \frac{8}{5} \text{ cm. Também, } O_2H = \frac{9}{10} \text{ cm.}$$

A altura de cada calota citada pode se obtida subtrativamente, a partir dos raios:  $2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \text{ cm}$  e  $\frac{3}{2} - \frac{9}{10} = \frac{3}{5} \text{ cm}$ , em  $S_1$  e  $S_2$ , nesta ordem.

Finalmente, lembrando que a área de uma calota de altura h contida numa superfície esférica de raio R é dada por  $2\pi Rh$ ,

$$\text{área solicitada é dada por: } 2\pi(R_1h_1 + R_2h_2) = 2\pi\left(2 \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{17\pi}{5} \text{ cm}^2$$

**ideal**  
**MILITAR**

**Solução Ideal – ITA 2010 – Matemática**

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

**Equipe de Matemática**

Prof. Marcelo Rufino  
Prof. Márcio Pinheiro  
Prof. Adenilson  
Prof. Manoel Leite  
Prof. Luiz Ernesto

**Coordenação**

Marcelo Rufino

**Digitação**

Cynthia Siqueira

Mais informações em [www.grupoideal.com.br/idealmilitar/idealmilitar.html](http://www.grupoideal.com.br/idealmilitar/idealmilitar.html)  
Tel: 3323 5051