

1) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

- a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$
d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

Alternativa A

Solução Ideal:

Sejam os seguintes eventos:

A = pessoa daltônica B = homem C = mulher

Logo:

$$p(C|A) = \frac{p(C \cap A)}{p(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,0025}{0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025} = \frac{0,0025}{0,0525} = \frac{1}{21}$$

2) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

- a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

Alternativa B

Solução Ideal:

Sabe-se que $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os segmentos que ligam a origem aos afixos de α e β .

Assim: $2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$

Desta forma, temos que $\arg(\alpha) - \arg(\beta) = \pm 90^\circ$. Como os módulos de α e β são iguais, pode-se interpretar α como sendo uma rotação de 90° ou 270° de β em torno da origem, ou seja, $\alpha = \pm i \cdot \beta$.

Assim: $\alpha^2 + \beta^2 = (\pm i \cdot \beta)^2 + \beta^2 = -\beta^2 + \beta^2 = 0$

3) Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } K \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de K que tornam o sistema impossível e S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T - S é

- a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

Alternativa A

Solução Ideal:

$$\text{O sistema } Ax = b \text{ é } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando o sistema teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \\ 2 & k & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & K+4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & 0 & -K(K+4) & -K \end{pmatrix}$$

1) Se $k = 0 \Rightarrow$ o sistema é indeterminado.

2) Se $K = -4 \Rightarrow$ o sistema é impossível.

Logo: $T - S = -4 - 0 = -4$

4) Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

- a) 3^n b) $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5 \cdot 3^{n-1}$

Alternativa D

Solução Ideal:

$$C^{-1}A = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A + C^{-1}, \quad A = (A^{-1} + C^{-1})A \Rightarrow$$

$$\det(I - C^{-1}A) = \det[(A^{-1} + C^{-1})A] =$$

$$= \det(A^{-1} + C^{-1}) \cdot \det A = \frac{1}{3} \Rightarrow \det(A^{-1} + C^{-1}) = \frac{1}{15}$$

$$\det B = \det[3(A^{-1} + C^{-1})^t] = 3^n \cdot \det(A^{-1} + C^{-1})^t =$$

$$= 3^n \cdot \det(A^{-1} + C^{-1}) = 3^n \cdot \frac{1}{15} = \frac{3^{n-1}}{5}$$

5) Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

- a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

Alternativa B

Solução Ideal:

Como $\partial(p \cdot q) = \partial(p) + \partial(q)$, então o grau de P é igual à soma dos graus dos 5 polinômios.

$$\text{Portanto: } \partial P = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 62 = \frac{2(q^5 - 1)}{q - 1} \Rightarrow$$

$$q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = 31 \Rightarrow q(q^2 + 1)(q + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Uma vez que q deve ser inteiro, então a única possibilidade é $q = 2$. Assim, $a_5 = a_1 q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$

6) Um diedro mede 120° . A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

- a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

Alternativa E

Solução Ideal:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R^3 = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \sqrt{3}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{R}{D} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{D} \Rightarrow D = 2 \text{ cm}$$

7) Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado \overline{AB} e N um ponto sobre o lado \overline{AD} , equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado \overline{AD} e por N uma reta s paralela ao lado \overline{AB} , que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a intersecção de s com lado \overline{BC} e Q é a intersecção de r com o lado \overline{DC} . Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

- a) $15+5\sqrt{5}$ b) $10+5\sqrt{5}$ c) $10-\sqrt{5}$
d) $15-5\sqrt{5}$ e) $10-3\sqrt{5}$

Alternativa D

Solução Ideal:

Seja $x = AM = NA$. Então, a seqüência $(x^2, (10 - x)^2, 10^2)$ é uma PG, concluindo-se que:

$$(10 - x)^2 = \sqrt{10^2 \cdot x^2} \Rightarrow 100 - 20x + x^2 = 10x \Rightarrow x^2 - 30x + 100 = 0$$

Portanto: $x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} \Rightarrow x = 15 \pm 5\sqrt{5}$

Já que $x \in]0, 10[: x = (15 - 5\sqrt{5}) \text{ m}$

8) Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a
a) -25 b) -27 c) -36 d) -39 e) -40

Alternativa A

Solução Ideal:

Como -1 é raiz: $-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow$

$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$ (1)

Como a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam uma PA:

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$ (2)

Substituindo a relação (2) em (1): $3a_3 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = 0$

Uma vez que $a_4 = 1/2$ a razão r da PA vale $a_4 - a_3 = 1/2$

Portanto: $a_1 = -1, a_2 = -1/2, a_3 = 0, a_4 = 1/2$ e $a_5 = 1 \Rightarrow$

$p(x) = x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 1$

Logo:

$p(-2) = (-2)^5 + \frac{(-2)^4}{2} - \frac{(-2)^2}{2} - 2 + 1 = -32 + 8 - 2 + 1 = -25$

9) Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a
a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Alternativa C

Solução Ideal:

Uma vez que os coeficientes da equação são reais e $1/2 - i/2$ é raiz, então seu conjugado, $1/2 + i/2$ também é.

Sejam r e s as outras duas raízes. Observando os coeficientes da equação, temos somente o valor da multiplicação das raízes:

$-\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)r \cdot s \Rightarrow r \cdot s = -1$

Como r e s são inteiros distintos, a única possibilidade é que $r = 1$ e $s = -1$ ou $r = -1$ e $s = 1$.

De posse das raízes pode-se determinar a equação:

$2[x - (1/2 - i/2)][x - (1/2 + i/2)](x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$
 $(2x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\Rightarrow a = -2, b = -1, c = 2$

Assim, $\max(a, b, c) = c = 2$

10) É dada a equação polinomial

$(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$
com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a.

a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

Alternativa E

Solução Ideal:

Como a equação é recíproca de 1ª espécie:

i) $a + c + 2 = a + b + 4 \Rightarrow b - c = -2$

ii) $b + 3c + 1 = c - a \Rightarrow a + b + 2c = -1$

Desde que 1 é raiz da equação:

$a + c + 2 + b + 3c + 1 + c - a + a + b + 4 = 0 \Rightarrow$

$a + 2b + 5c = -7$

Resolvendo o sistema obtemos:
$$\begin{cases} b - c = -2 \\ a + b + 2c = -1 \\ a + 2b + 5c = -7 \end{cases}$$
 obtemos

$a = 4, b = -3$ e $c = -1$.

Portanto: $abc = 12$

11) Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o

valor de: $\cos\left(\arcsen\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$

- a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$
d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Alternativa B

Solução Ideal:

Se $A = \arcsen(3/5)$ e $B = \arccos(4/5)$, então $\sen A = 3/5$, $\cos A = 4/5$, $\sen B = 3/5$ e $\cos B = 4/5$

Portanto: $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sen A \cdot \sen B$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

12) Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

- a) $y = \sqrt{3}(x-1)$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x-7)$
e) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Alternativa E

Solução Ideal:

Derivando em x a equação da cônica:

$2x - 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Desta forma, o coeficiente angular da reta normal à cônica

em P vale: $m = -\frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sendo a reta dada por $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + n$, de modo que esta

reta passe por P :

$\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = \sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} \Rightarrow$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$

13) O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\sen^2(3x) + \sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

- a) $[-3; 3]$ e 2π b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$ e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Alternativa C

Solução Ideal:

Sabe-se que $\cos 6x = 1 - \sen^2 3x$

Substituindo esta relação em $f(x)$ obtemos: $f(x) = \sen 6x - \cos 6x$

Multiplicando em cima e em baixo por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ temos:

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 6x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 6x \right) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) \cdot \sin 6x - \sin(\pi/4) \cdot \cos 6x) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sin(6x - \pi/4)$$

Como a imagem da função $\sin x$ é $[-1, 1]$, então a imagem da função f é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

O período é dado por $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

14) Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4.5^x| = |5^x - 1|$ é

a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$

b) $\{0, 1 \log_5(2 + \sqrt{5})\}$

c) $\{0, \frac{1}{2} \log_5 2, \frac{1}{2} \log_5 3, \log_5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\}$

d) $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log(2 - \sqrt{3})\}$

e) A única solução é $x = 0$

Alternativa D

Solução Ideal:

Podem ocorrer dois casos:

$$5^{3x} - 5^{2x+1} + 4.5^x = 5^x - 1 \text{ ou } 5^{3x} - 5^{2x+1} + 4.5^x = 1 - 5^x.$$

Fazendo $5^x = y$:

$$y^3 - 5y^2 + 3y + 1 = 0 \text{ ou } y^3 - 5y^2 + 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-1)(y^2 - 4y - 1) = 0 \text{ ou } (y-1)(y^2 - 4y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 1 \text{ ou } y = 2 + \sqrt{5} \text{ ou } y = 2 - \sqrt{5} \text{ ou } y = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } y = 2 - \sqrt{3}$$

Assim:

$$5^x = 1 \text{ ou } 5^x = 2 + \sqrt{5} \text{ ou } 5^x = 2 - \sqrt{5} \text{ (não convém) ou}$$

$$5^x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } 5^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$x \in \{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$$

15) Um subconjunto D de \mathbb{R} tal que a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

a) \mathbb{R} b) $(-\infty, 1]$ c) $[0, 1/2]$

d) $(0, 1)$ e) $[1/2, \infty)$

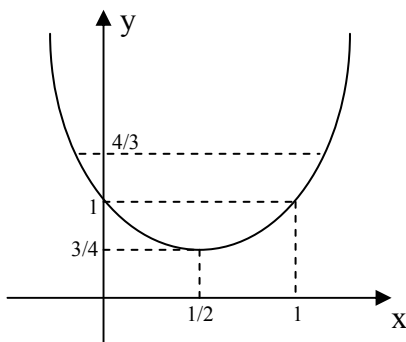
Alternativa C

Solução Ideal:

Seja $g(x) = x^2 - x + 1$. Temos que $f(x) = |\ln g(x)|$ é uma função injetora quando existem dois números reais a e b , com $a \neq b$, tais que $|\ln g(a)| = |\ln g(b)|$, ou seja, quando $g(a) = g(b)$ ou $g(a) = \frac{1}{g(b)}$.

$$= g(b) \text{ ou } g(a) = \frac{1}{g(b)}$$

Analisemos agora o gráfico de $g(x) = x^2 - x + 1$.



Note que as imagens da função $g(x)$ para $x < 1/2$ e para $x > 1/2$ são iguais. Desta maneira, D deve ser subconjunto do intervalo $(-\infty, 1/2[$ ou do intervalo $]1/2, +\infty)$. Observando as alternativas eliminamos A, B e D .

Podemos notar que o valor mínimo de $g(x)$ é $3/4$, ocorrendo para $x = 1/2$, e que a imagem da função $g(x)$ no intervalo $]1/2, 1[$ é o intervalo $]3/4, 1[$. Pode-se concluir também que para qualquer y que satisfaça $1 < y < 4/3$ sempre é possível escolher $x > 1$ de modo que $g(x) = y$. Logo, para cada $a \in$

$$]1/2, 1[\text{ existe um número real } b \text{ de modo que } g(a) = \frac{1}{g(b)}.$$

Desta forma o intervalo da alternativa E não confere. A alternativa C apresenta um intervalo possível, uma vez que neste para a e b neste intervalo tem-se $g(a) \neq g(b)$ e

$$g(a) \neq \frac{1}{g(b)}$$

16) A soma de todas as soluções distintas da equação:

$\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a:

a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

Alternativa E

Solução Ideal:

$$\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos \left(\frac{9x+3x}{2}\right) \cos \left(\frac{9x-3x}{2}\right) + 2 \cos 6x = 0$$

$2 \cos 6x (\cos 3x + 1) = 0$ assim, para $0 \leq x \leq \pi/2$, temos:

i) $\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Logo: $x = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$

ii) $\cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = \pi + k\pi$

Logo: $x = \frac{\pi}{3}$

Assim: $S = \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$

17) Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a:

a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$

d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

Alternativa A

Solução Ideal:

Como $B \in \{(1, 182), (2, 181), (3, 180), \dots, (182, 1)\}$ então $n(B) = 182$.

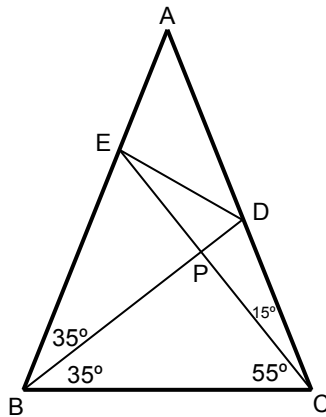
Logo: $p = \frac{n(B)}{n(H)} = \frac{182}{365 \cdot 364} = \frac{1}{730}$.

18) Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, \widehat{BAC} , mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\widehat{ACE} = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} ,

tome o ponto D tal que $\hat{D}BC = 35^\circ$. Então, o ângulo $\hat{E}DB$ vale:

- a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

Alternativa D
Solução Ideal:



Seja P a interseção entre CE e BD. Como $\hat{A} = 40^\circ$ e ΔABC é isósceles então $\hat{B} = 70^\circ$ e $\hat{C} = 70^\circ$.

Como $\angle ACE = 15^\circ$ e $\angle DBC = 35^\circ$ então $\angle DBA = 35^\circ$ e $\angle ECB = 55^\circ$.

$\angle BPC = 180^\circ - (\angle PBA + \angle PCB) = 180^\circ - 35^\circ - 55^\circ = 90^\circ$.

$\angle BEC = 180^\circ - \angle EBC - \angle ECB = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ = 55^\circ$.

Desta forma os triângulos BPE e BPC são congruentes, implicando que $PE = PC$.

Como os triângulos EPD e CPD são retângulos com dois catetos congruentes, então $\Delta EPD \cong \Delta CPD$, fazendo com que $\angle EDB = 75^\circ$.

19) Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de \mathbb{N} tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a:

- a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$
c) $\{1, 3, 7, 8\}$ d) $\{1, 3\}$
e) $\{7, 8\}$

Alternativa C
Solução Ideal:

$X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$ então:

$X = \{2, 4\} \cup A_1$, $W = \{2, 4\} \cup B_1$ e $Z = \{2, 4\} \cup C_1$, com $A_1 \cap B_1 \cap C_1 = \emptyset$, $A_1 \cap \{2, 4\} = \emptyset$, $B_1 \cap \{2, 4\} = \emptyset$ e $C_1 \cap \{2, 4\} = \emptyset$.

$W \cap (X - Z) = \{7, 8\} \Rightarrow 7$ e 8 pertencem a W e X mas não a Z : $X = \{2, 4, 7, 8\} \cup A_2$, $W = \{2, 4, 7, 8\} \cup B_2$, com $A_2 \cap B_2 \cap C_1 = \emptyset$, $A_2 \cap \{2, 4, 7, 8\} = \emptyset$ e $B_2 \cap \{2, 4, 7, 8\} = \emptyset$.

$(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 1, 2, 3$ e 4 pertencem a X e Z : $X = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \cup A_3$, $Z = \{1, 2, 3, 4\} \cup C_2$, com $A_3 \cap B_2 \cap C_2 = \emptyset$, $A_3 \cap \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} = \emptyset$ e $C_2 \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset$.

Para quaisquer conjuntos A_3 , B_2 e C_2 , nestas condições:

$X \cap (Z \cup W) = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$

$W \cap (Y \cup Z) = \{2, 4\}$

Logo: $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = \{1, 3, 7, 8\}$

20) Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r . As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s , são iguais a:

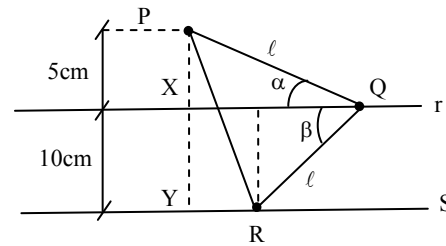
- a) $175 \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$ b) $175 \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

Alternativa B
Solução Ideal:



Sejam X e Y as respectivas interseções da perpendicular às retas r e s por P, com tais retas. Fazendo α e β as medidas de $\hat{P}QX$ e $\hat{R}QX$, conforme a figura, tem-se que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{5}{\ell} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{\ell^2}}; \text{sen } \beta = \frac{10}{\ell} \rightarrow$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{100}{\ell^2}}$$

em que ℓ é o lado do triângulo PQR (α e β são agudos).

Portanto:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\ell^2 - 25}}{\ell} \cdot \frac{\sqrt{\ell^2 - 100}}{\ell} - \frac{5}{\ell} \cdot \frac{10}{\ell} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\sqrt{(\ell^2 - 25) \cdot (\ell^2 - 100)} = \frac{\ell^2}{2} + 50 \rightarrow$$

$$\ell^4 - 125\ell^2 + 2500 = \frac{\ell^4}{4} + 50\ell^2 + 2500 \rightarrow \frac{3\ell^4}{4} = 175\ell^2 \rightarrow$$

$$\ell^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 7}{3} \rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{21}}{3} \text{ cm. Logo:}$$

$$S = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{175\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2 \text{ e } 2p = 10\sqrt{21} \text{ cm}$$

21) Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Solução Ideal:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \right\}$$

Condição de existência

$$3x^2 + 2x \geq 0 \leftarrow \left\{ x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x \geq 0 \right\}$$

Resolvendo:

$$\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ou } -1 < x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Fazendo a intersecção de 1 e 2, temos:

$$S = (-\infty, -1] \cup [-1, -2/3] \cup [2, +\infty)$$

22) Determine as raízes em \mathbb{C} de $4z^6 + 256 = 0$, na forma:

$a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a:

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z + 2| < 3\}.$$

Solução Ideal:

$$4Z^6 + 256 = 0 \Rightarrow Z^6 = -64 \Rightarrow$$

$$Z_k = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{6}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow$$

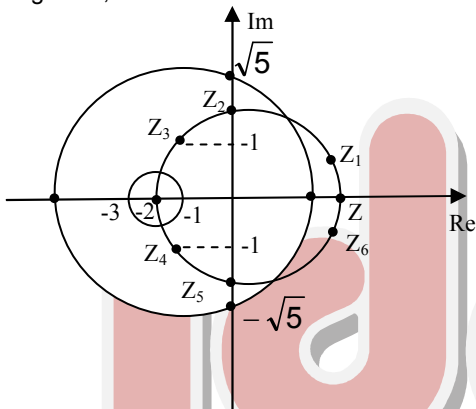
$$\begin{cases} Z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}, Z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \\ Z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}, Z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} \\ Z_4 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}, Z_5 = 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$|Z_0 + 2| = |Z_5 + 2| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} > 3$$

$$|Z_1 + 2| = |Z_4 + 2| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \Rightarrow \text{pertence a S}$$

$$|Z_2 + 2| = |Z_3 + 2| = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} > 3 \Rightarrow \text{pertence a S.}$$

Fazendo o gráfico, temos:



$$\text{Logo: } S = \{2i, -2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\}$$

23) Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Solução Ideal:

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, como $y = x^2 + x + 1$ é uma função quadrática sempre positiva (discriminante negativa e concavidade p/ cima), não há restrições para valores de x na função $f(x)$.

i) Seja a função $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, então $p(-x) =$

$$\frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x) \Rightarrow p(x) \text{ é função par.}$$

ii) Seja a função $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, então

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x) \Rightarrow i(x) \text{ é função ímpar.}$$

Assim:

$$h(x) = p(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) + \ln(x^2 - x + 1)}{2}$$

$$g(x) = i(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 - x + 1)}{2}, \text{ onde}$$

$$h(x) + g(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

24) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por: $x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$. Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Solução Ideal:

Como 0 é raiz com multiplicidade 3 temos:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

Somando (1) com (2) temos: $3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ -\beta - \gamma = -1 \Rightarrow \text{sistema indeterminado com } \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \\ 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

$\beta = 1 - \gamma$ mas como a multiplicidade do 0 é 3 temos que

$$\alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow -(1 - \gamma) - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq -1.$$

Logo temos $\alpha = 0, \beta = 1 - \gamma, \beta \neq 2$ e $\gamma \neq -1$.

25) Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Solução Ideal:

Como A é simétrica então $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ e como A é ortogonal

então $\det A = \pm 1$.

$$1) \det A = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} z & -y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = y \Rightarrow y = 0 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow xz - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Logo: } A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \det A = -1: \begin{pmatrix} -z & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow z = -x$$

$$\det A = -1: xz - y^2 = -1 \Rightarrow -x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

$$\text{Neste caso } A = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{1 - y^2} & y \\ y & \mp \sqrt{1 - y^2} \end{pmatrix}, \text{ com } y \in [-1, 1]$$

26) Determine todos os valores $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tais que a

equação (em x): $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg} \alpha = 0$, admita apenas raízes reais simples.

Solução Ideal:

$$\text{Seja } y = x^2: y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (1)$$

Para que na equação original tenhamos raízes reais simples a equação (1) deve possuir $\Delta > 0$ e raízes positivas, logo:

$$i) \Delta = (2\sqrt[4]{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4\sqrt{3} - 4 \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$$

$$\text{Assim para } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ temos } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$ii) \frac{2\sqrt[4]{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 4 \cdot \operatorname{tg} \alpha}}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha} > 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha} < \sqrt[4]{3} \Rightarrow \sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right[\quad (3)$$

Fazendo a interseção entre (2) e (3): $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right[$.

27) Em um espaço amostral com uma probabilidade P , são dados os eventos A , B e C tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C | A \cap B)$ e $P(C | A \cap B^c)$.

Solução Ideal:

Como A e B são independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Sabe-se também que se A e B são independentes também o são A e B^c . Logo: $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

$$P(C | A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}$$

Pela teoria dos conjuntos tem-se que: $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B)$, ou seja, $P((A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B)) = 3/10$

Por outro lado: $P((A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B)) = P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B) - P(A \cap B^c \cap C \cap A \cap B) \Rightarrow$

$$\frac{3}{10} = P(A \cap B^c \cap C) + \frac{1}{4} - 0 \Rightarrow P(A \cap B^c \cap C) = \frac{1}{20}$$

$$\text{Desta forma: } P(C | A \cap B^c) = \frac{P(A \cap B^c \cap C)}{P(A \cap B^c)} = \frac{1/20}{1/4} = \frac{1}{5}$$

28) Um triângulo acutângulo de vértices A , B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que \overline{AB} mede $2\sqrt{5}$ e \overline{BC} mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC .

1ª Solução Ideal:

Seja D a projeção de B em AC .

$$\text{Área do triângulo } \triangle ABC: S = \frac{ab \cdot c}{4R} = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a \cdot c}{2R}, \text{ onde } a$$

$$= AB, b = AC, c = BC, R = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Então: } h = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ onde } h \text{ é altura em relação ao vértice } B.$$

Seja $m = AD$ e $n = DC$. Para o triângulo retângulo $\triangle BAD$:

$$m^2 = (2\sqrt{5})^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Leftrightarrow m = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Para o triângulo retângulo $\triangle BDC$:

$$n^2 = (2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Leftrightarrow n = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como $AC = AD + DC = m + n = 2\sqrt{5}$, então a área do

$$\text{triângulo } \triangle ABC \text{ é: } \text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 6 \text{ u.a.}$$

2ª Solução Ideal:

$$\text{Pela lei dos senos: } \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow b = \frac{10\sqrt{2}}{3} \sin B$$

$$\text{Lei dos cossenos: } b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$\frac{200 \cdot \sin^2 B}{9} = 8 + 20 - 8\sqrt{10} \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$200 - 200 \cdot \cos^2 B = 272 - 72\sqrt{10} \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$50 \cdot \cos^2 B - 18\sqrt{10} \cdot \cos B + 13 = 0, \text{ onde existem duas soluções:}$$

$$\text{i) } \cos B = \frac{26\sqrt{10}}{100} \Rightarrow \sin B = \frac{18\sqrt{10}}{100} \Rightarrow b = \frac{6}{5}\sqrt{5} \Rightarrow$$

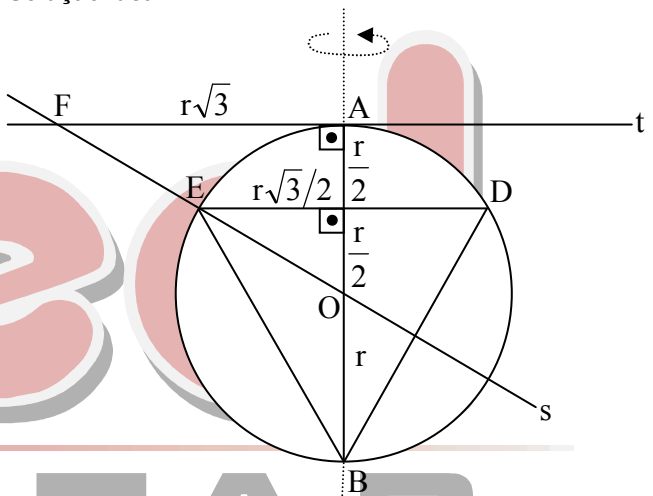
$c^2 > a^2 + b^2$, ou seja, triângulo obtusângulo, fazendo com que este valor de $\cos B$ não satisfaça o enunciado.

$$\text{ii) } \cos B = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Logo: } S = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10}}{20} = 6 \text{ u.a.}$$

29) Seja C uma circunferência de raio r e centro O e \overline{AB} um diâmetro de C . Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C . Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A . Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos \overline{AF} e \overline{EF} em torno do diâmetro \overline{AB} .

Solução Ideal:



Seja P a interseção de \overline{AB} e \overline{DE} . Os triângulos PEO e AFO são semelhantes. Como o lado do triângulo equilátero inscrito é $r\sqrt{3}$, segue da semelhança que $AF = 2 \cdot PE = r\sqrt{3}$. É conveniente lembrar que o baricentro O do triângulo BDE divide a altura \overline{BP} , os segmentos \overline{OB} e \overline{PO} , tais que $OB = 2 \cdot PO$.

Quando a região pedida rotaciona em torno de \overline{AB} , obtém-se um sólido que é a diferença entre um cone, de vértice O e raio da base \overline{AF} , e um setor esférico, originado da revolução do setor circular AOE . Lembrando que o volume de um setor esférico é $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, em que $h = PA$ é a projeção do arco AE sobre o eixo de rotação, conclui-se que o volume pedido é

$$V = V_{\text{cone}} - V_{\text{setor}} = \frac{\pi(r\sqrt{3})^2 r}{3} - \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{2} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$$

30) Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5)$, $(-1, 2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2, 5)$.

Solução Ideal:

Com a, b e c estão ordem em P.A. temos que $y = ax^2 + (a + r)x + (a + 2x)$

$$\text{logo } \begin{cases} 5 = 4a + 2(a+1) + (a+2r) = 7a + 4r \\ 2 = a + (-1)(a+r) + (a+2r) = a+r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7a + 4r = 5 \\ a + r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a + 4r = 5 \\ -4a - 4r = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow r = 2 - a = 3 \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 5$$

$$\text{Derivando: } y' = -2x + 2$$

$$P(2, 5): y' = -2 \cdot 2 + 2 = -2$$

$$\text{Reta tangente: } y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$$

$$\text{Vértice: } x_v = 1, y_v = 6$$

$$\text{Distância: } d = \frac{|2 + 6 - 9|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$
