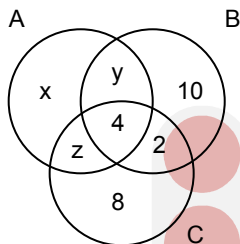


- 1) Se A, B, C forem conjuntos tais que  
 $n(A \cup B) = 23$ ,  $n(B - A) = 12$ ,  $n(C - A) = 10$ ,  
 $n(B \cap C) = 6$  e  $n(A \cap B \cap C) = 4$ ,  
 então  $n(A)$ ,  $n(A \cup C)$ ,  $n(A \cup B \cup C)$ , nesta ordem,  
 a) formam uma progressão aritmética de razão 6.  
 b) formam uma progressão aritmética de razão 2.  
 c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.  
 d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.  
 e) não formam uma progressão aritmética.

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: D**

A partir de  $n(A \cap B \cap C) = 4$ ,  $n(B \cap C) = 6$ ,  $n(C - A) = 10$  e  $n(B - A) = 12$  podemos determinar alguns números no diagrama.



$n(A \cup B) = 23 \Rightarrow x + y + z = 7$   
 Logo:  $n(A) = 4 + x + y + z = 11$   
 $n(A \cup C) = 14 + x + y + z = 21$   
 $n(A \cup B \cup C) = 21 + 10 = 31$

- 2) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é  
 a)  $2^8 - 9$       b)  $2^8 - 1$       c)  $2^8 - 2^6$   
 d)  $2^{14} - 2^8$       e)  $2^8$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: A**

Como existem 8 elementos de A que não pertencem a B:

$$N = \binom{8}{6} + \binom{8}{5} + \binom{8}{4} + \binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0}$$

$$= 2^8 - \binom{8}{7} - \binom{8}{8} = 2^8 - 9$$

- 3) Considere a equação:

$$16 \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 = \left( \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} \right)^4$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é  
 a) 3      b) 6      c) 9      d) 12      e) 15

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: B**

i)  $\left( \frac{1+i}{1+i} - \frac{1-i}{1-i} \right)^4 = \left( \frac{1+2i-1-(1-2i-1)}{2} \right)^4 = (2i)^4 = 16$

ii)  $(1-ix)^3 = (1+ix)^3 \Rightarrow 1-3ix-3x^2+ix^3 = 1+3ix-3x^2-ix^3 \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow$

$S = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$   
 Logo:  $0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$

- 4) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo.

$\frac{1}{1+i \cot gx}$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

- a)  $|\cos x|$       b)  $(1+\sin x)/2$       c)  $\cos^2 x$   
 d)  $|\operatorname{cosec} x|$       e)  $|\sin x|$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: E**

$$\left| \frac{1}{1+i \cot gx} \right| = \frac{1}{|1+i \cot gx|} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 gx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x}} = \frac{1}{|\operatorname{cosec} x|} = |\sin x|, x \neq k\pi$$

- 5) Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio.

- a)  $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0$ .  
 b)  $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0$ .  
 c)  $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0$ .  
 d)  $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$ .  
 e)  $x^3 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: D**

Inicialmente, encontre-se o raio do círculo inscrito no triângulo isósceles. Como este tem base B e altura H, os lados congruentes medem  $\sqrt{\frac{B^2}{4} + H^2}$ , cada, pelo Teorema de Pitágoras.

Usando a fórmula  $S = p \cdot r$ , tem-se que:

$$\frac{BH}{2} = \frac{B + 2 \cdot \sqrt{\frac{B^2}{4} + H^2}}{2} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{BH}{B + \sqrt{B^2 + 4H^2}}$$

Uma vez que  $\left( BH, \frac{BH}{2}, \pi r^2 \right)$  Estão em P.G, conclui-se que  $\pi r^2 = \frac{BH}{4}$ . Logo, de acordo com o resultado

precedente:  $\pi \cdot \left( \frac{BH}{B + \sqrt{B^2 + 4H^2}} \right)^2 = \frac{BH}{4} \Leftrightarrow$

$4 \pi BH = \left( B + \sqrt{B^2 + 4H^2} \right)^2 \Leftrightarrow$

$4\pi BH = 2B^2 + 4H^2 + 2B \sqrt{B^2 + 4H^2}$ . Dividindo ambos os membros por 2BH e fazendo, em seguida,  $\frac{B}{H} = x$ , conclui-se que x deve satisfazer:

$x + \frac{2}{x} + \sqrt{x^2 + 4} - 2\pi = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + 4} = - \left( x + \frac{2}{x} - 2\pi \right) \Rightarrow x^2 + 4 = \left( x + \frac{2}{x} - 2\pi \right)^2 \Rightarrow$

$\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$

6) Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão  $r$ , então  $r$  pertence ao intervalo.

- a)  $(0, (1 + \sqrt{2})/2)$   
 b)  $\left( (1 + \sqrt{2})/2, \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2} \right)$   
 c)  $\left( \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}, (1 + \sqrt{5})/2 \right)$   
 d)  $\left( (1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2 \right)$   
 e)  $\left( \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, (2 + \sqrt{3})/2 \right)$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**NÃO HÁ ALTERNATIVA CORRETA.**

Sejam  $a, ar, ar^2$  os lados do triângulo

1º caso:  $r \geq 1$  (1)

i) existência do triângulo:  $a^2 < a + ar \Rightarrow r^2 - r - 1 < 0 \Rightarrow$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

ii) obtusângulo:  $a^2 + a^2r^2 - a^2r^4 < 0 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 > 0 \Rightarrow$

$$r < -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad r > \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2º Caso:  $0 < r < 1$  (4)

i) existência do triângulo:  $a < ar^2 + ar \Rightarrow r^2 + r - 1 > 0 \Rightarrow$

$$r < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad r > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

ii) obtusângulo:  $a^2r^4 + a^2r^2 - a^2 < 0 \Rightarrow r^4 + r^2 - 1 < 0 \Rightarrow$

$$-\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} < r < \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \quad (6)$$

$$(4) \cap (5) \cap (6) \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < r < \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$S = \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \cup \left( \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

**Obs:** A banca elaboradora certamente imaginou como resposta a alternativa C, que é um subconjunto do conjunto solução, ou seja, não há como garantir que  $r$  pertença ao intervalo definido pela alternativa C.

7) Sejam  $x, y$  e  $z$  números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base  $k$  são números primos satisfazendo.

$$\log_k(xy) = 49, \\ \log_k(x/y) = 44$$

Então,  $\log_k(xyz)$  é igual a

- a) 52    b) 61    c) 67    d) 80    e) 97

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: A**

Desenvolvendo:

$$\log_k x + \log_k y = 49 \\ \log_k x - \log_k z = 44$$

Como  $\log_k x$  e  $\log_k y$  são números primos cuja soma é ímpar, um deles é par e outro é ímpar. Pela 2ª equação

$\log_k x > 44$ , logo, uma vez que o único primo par é 2, temos que  $\log_k x = 47$  e  $\log_k y = 2 \Rightarrow \log_k z = 3$ . Assim:  $\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 52$

8) Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais tais que  $e^x, e^y$  e o quociente.

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

São todos racionais. A soma  $x + y$  é igual a.

- a) 0    b) 1    c)  $2 \log_5 3$     d)  $\log_5 2$     e)  $3 \log_e 2$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: E**

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}} \times \frac{4 + e^y\sqrt{5}}{4 + e^y\sqrt{5}} = \frac{4e^x - 10e^y + \sqrt{5}(e^{x+y} - 8)}{16 - 5e^{2y}}$$

Uma vez que  $16 - 5e^{2y} \in \mathbb{Q}$  e  $4e^x - 10e^y \in \mathbb{Q}$  então

$$\sqrt{5}(e^{x+y} - 8) \in \mathbb{Q}.$$

Desde que  $e^{x+y} - 8 \in \mathbb{Q}$  então a única possibilidade é  $e^{x+y} - 8 = 0 \Rightarrow e^{x+y} = 2^3 \Rightarrow x + y = 3 \log_e 2$

9) Seja  $Q(z)$  um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de  $z^5$  é igual a 1. Sendo  $z^3 + z^2 + z + 1$  um fator de  $Q(z)$ ,  $Q(0) = 2$  e  $Q(1) = 8$ , então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de  $Q(z)$  é igual a.

- a) 9    b) 7    c) 5    d) 3    e) 1

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: B**

Pelo enunciado:  $Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1)(z^2 + az + b)$

$$Q(0) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$Q(1) = 8 \Rightarrow 8 = 4(1 + a + 2) \Rightarrow a = -1$$

$$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1)(z^2 - z + 2)$$

$$Q(z) = (z+1)(z-i)(z+i)\left(z - \left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)\right)$$

$$S = |1|^2 + |i|^2 + |-i|^2 + \left|\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right|^2 + \left|\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right|^2 = 1+1+1+2+2=7$$

10) Sendo  $c$  um número real a ser determinado, decomponha o polinômio  $9x^2 - 63x + c$ , numa diferença de dois cubos.

$$(x + a)^3 - (x + b)^3$$

Neste caso,  $|a+b| - |c|$  é igual a

- a) 104    b) 114    c) 124    d) 134    e) 144

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: B**

$$9x^2 - 63x + c = (x + a)^3 - (x + b)^3 =$$

$$= 3(a - b)x^2 + 3(a - b)(a + b)x + (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$i) 3(a - b) = 9 \Rightarrow (a - b) = 3$$

$$ii) 3(a - b)(a + b) = -63 \Rightarrow (a + b) = -7$$

Resolvendo o sistema obtemos  $a = -2$  e  $b = -5$

$$iii) c = (a - b)(a^2 + b^2 + ab) = (3)(4 + 25 + 10) = 117$$

Portanto:  $|a + b| - |c| = |-2 + 5 - 117| = 114$

11) Sobre a equação na variável real  $x$ ,

$$||x - 1| - 3| - 2| = 0,$$

Podemos afirmar que:

- a) ela não admite solução real.  
 b) a soma de todas as suas soluções é 6.  
 c) ela admite apenas soluções positivas.  
 d) a soma de todas as soluções é 4  
 e) ela admite apenas duas soluções reais.

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: D**

$||x-1|-3|-2|=0 \Leftrightarrow ||x-1|-3|=2 \Leftrightarrow |x-1|-3=2$   
 ou  $|x-1|-3=-2 \Leftrightarrow |x-1|=5$  ou  $|x-1|=1 \Leftrightarrow x-1=5$   
 ou  $x-1=-5$  ou  $x-1=1$  ou  $x-1=-1 \Leftrightarrow x=6$  ou  $x=-4$   
 ou  $x=2$  ou  $x=0$ .

Logo, A soma de todas as soluções reais é 4.

**12)** Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

- a) 204                      b) 206                      c) 208  
 d) 210                      e) 212

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: E**

I) Com todos distintos:

7 possibilidades      6 possibilidades      5 possibilidades

$7 \times 6 \times 5 = 210$  possibilidades

II) Com repetição:

1 ou 2                      7                      7  
 2 possibilidades      1 possibilidade      1 possibilidade

$2 \times 1 \times 1 = 2$  possibilidades

No total: 212 possibilidades.

**13)** Seja  $x$  um número real no intervalo  $0 < x < \pi/2$ . Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade.

- $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \sec(x) \geq 0$ .  
 a)  $\pi/2$     b)  $\pi/3$     c)  $\pi/4$     d)  $\pi/6$     e)  $\pi/12$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: D**

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \sec x \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \cdot \sec x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{cotg} x \geq \sqrt{3}$$

Como  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , a solução da inequação é o intervalo

$$S = \left[0, \frac{\pi}{6}\right], \text{ de comprimento } \frac{\pi}{6} \text{ unidades.}$$

**14)** Assinale a opção que indica a soma dos elementos de  $A \cup B$ , sendo:

$$A = \left\{x_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{y_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}.$$

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
 d)  $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$                       e)  $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)/3$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: C**

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{24} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}^2\frac{11\pi}{24} =$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \cos^2\frac{\pi}{24} = 1 + 1 = 2$$

**15)** Sejam  $A = (a_{jk})$  e  $B = (b_{jk})$ , duas matrizes quadradas  $n \times n$ , onde  $a_{jk}$  e  $b_{jk}$  são, respectivamente, os elementos da linha  $j$  e coluna  $k$  das matrizes  $A$  e  $B$ , definidos por.

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \text{ quando } j \geq k, \quad a_{jk} = \binom{k}{j}, \text{ quando } j < k$$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada  $(c_{jk})$  de ordem  $n \times n$  é definido por  $\sum_{p=1}^n C_{pp}$ . Quando  $n$  for ímpar, o traço de  $A$

+  $B$  é igual a.

- a)  $n(n-1)/3$                       b)  $(n-1)(n+1)/4$   
 c)  $(n^2-3n+2)/(n-2)$                       d)  $3(n-1)/n$ .  
 e)  $(n-1)/(n-2)$

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: C**

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p} = (1-2)^{jk} = (-1)^{jk}$$

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) =$$

$$= \binom{1}{1} + \binom{2}{2} + \dots + \binom{n}{n} + (-1)^{1 \cdot 1} + (-1)^{2 \cdot 2} + \dots + (-1)^{n \cdot n} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tr}(A+B) = 1 + 1 + \dots + 1 + (-1 + 1 - 1 + \dots + (-1)) = n - 1 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n-2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n-2}$$

**16)** Considere no plano cartesiano  $xy$  o triângulo delimitado pelas retas  $2x = y$ ,  $x = 2y$  e  $x = -2y + 10$ . A área desse triângulo mede.

- a) 15/2                      b) 13/4                      c) 11/6  
 d) 9/4                      e) 7/2

**SOLUÇÃO IDEAL**

**ALTERNATIVA: A**

Calculando as interseções:

i)  $\begin{cases} 2x = y \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

ii)  $\begin{cases} 2x = y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Rightarrow (2,4)$

iii)  $\begin{cases} x = 2y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Rightarrow \left(5, \frac{5}{2}\right)$

Pelo dispositivo delta:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & & \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 20 & 5 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \end{array}$$

$$\frac{20}{2} = 10 \quad \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\text{Logo } S = \frac{|20-5|}{2} = \frac{15}{2}$$

17) Sejam A: (a, 0), B: (0, a) e C: (a,a), pontos do plano cartesiano, em que a é um número real nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P: (x, y) cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

- a)  $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$   
 d)  $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$   
 e)  $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

**SOLUÇÃO IDEAL**  
**ALTERNATIVA: A**

Reta que passa por A e B:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$

Logo:  $\frac{|x + y - a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy =$   
 $= 2x^2 - 4xa + 2a^2 + 2y^2 - 4ya + 2a^2 \Rightarrow$   
 $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

18) Seja  $P_n$  um polígono regular de n lados, com  $n > 2$ . Denote por  $a_n$  o apótema e por  $b_n$  o comprimento de um lado de  $P_n$ . O valor de n para o qual valem as desigualdades.

$b_n \leq a_n$  e  $b_{n-1} > a_{n-1}$ ,

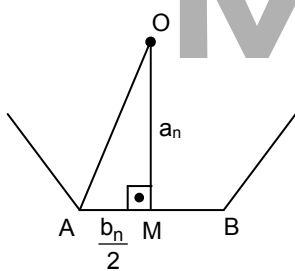
Pertence ao intervalo

- a)  $3 < n < 7$       b)  $6 < n < 9$       c)  $8 < n < 11$   
 d)  $10 < n < 13$       e)  $12 < n < 15$

**SOLUÇÃO IDEAL**  
**ALTERNATIVA: B**

Sendo O o centro de  $P_n$  e M o ponto médio de um lado qualquer,  $\overline{AB}$ , obtém-se o triângulo retângulo AMO, em

que  $m(\widehat{AOM}) = \frac{\pi}{n}$ . Assim:



$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{b_n}{2a_n} \leq \frac{1}{2}$ , pois  $b_n \leq a_n$ .

Daí,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow n > 6$  (eq. 1)

Analogamente, para o polígono  $P_{n-1}$ :

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n-1}\right) = \frac{b_{n-1}}{2a_{n-1}} > \frac{1}{2}$ , já que  $b_{n-1} > a_{n-1}$ .

Logo:

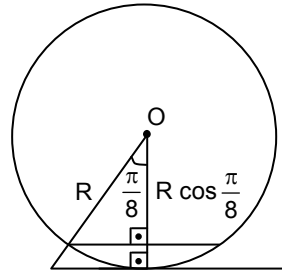
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n-1}\right) > \frac{1}{2} > \sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \Rightarrow n - 1 < 8 \Rightarrow n < 9$  (eq. 2)

De (eq. 1) e (eq. 2), segue o resultado:  $6 < n < 9$

19) Sejam  $P_1$  e  $P_2$  octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo  $A_1$  a área de  $P_1$  e  $A_2$  a área de  $P_2$ , então a razão  $A_1/A_2$  é igual a.

- a)  $\sqrt{5/8}$       b)  $9\sqrt{2}/16$       c)  $2(\sqrt{2}-1)$   
 d)  $(4\sqrt{2}+1)/8$       e)  $(2+\sqrt{2})/4$

**SOLUÇÃO IDEAL**  
**ALTERNATIVA: E**



Os octógonos regulares são semelhantes entre si. Portanto, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, a qual pode ser calculada pela razão entre os respectivos apótemas. Assim:

$\frac{A_1}{A_2} = k^2 = \left(\frac{R \cos \frac{\pi}{8}}{R}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

20) Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede  $\sqrt{3}$  cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a  $1 \text{ cm}^3$  e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é  $1/\sqrt{2}$ , a altura do tronco, em centímetros, é igual a.

- a)  $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$       b)  $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/3$   
 c)  $(3\sqrt{3}-\sqrt{6})/21$       d)  $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})/6$   
 e)  $(2\sqrt{6}-\sqrt{2})/22$

**SOLUÇÃO IDEAL**  
**ALTERNATIVA: C**

Sendo  $\sqrt{3}$  cm o apótema da base da pirâmide original, tem-se que a aresta dessa base mede 2 cm. Como a pirâmide nova é semelhante à original, e a razão entre as alturas é a razão de semelhança, conclui-se que a aresta da base da nova pirâmide é igual a  $\sqrt{2}$  cm. Finalmente, sendo x a altura do tronco, seu volume será dado por:

$\frac{x}{3} \left( \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{3}}{2}} \right) = 1 (\text{cm}^3)$   
 $\Rightarrow \frac{x}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (6 + 2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{21} \text{ cm}$

21) Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjunto de números reais tais que.

- $A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 2\}$ ;  
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{-x} > 0\}$   
 $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : \log(x + 4) \leq 0\}$   
 $B \cap C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x + 7 < 2\}$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \geq 0\} =$   
 $= (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$  (eq. 1)  
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : (2^{-x})^3 - 3 \cdot (2^{-x})^2 - 2^{-x} > 0\} =$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : (2^{-x}) \cdot [(2^{-x})^2 - 3 \cdot 2^{-x} - 4] > 0\} =$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : (2^{-x})^2 - 3 \cdot 2^{-x} - 4 > 0\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R}: 2^{-x} < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: 2^{-x} > 4\} = \\ = \emptyset \cup \{x \in \mathbb{R}: -x > 2\} = (-\infty, -2) \quad (\text{eq. 2})$$

$$A \cap C = \{x \in \mathbb{R}: \log(x+4) \leq \log 1\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x+4 \leq 1\} = (-4, -3] \quad (\text{eq. 3})$$

$$B \cap C = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) \quad (\text{eq. 4})$$

Notando que  $C = [(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B)] \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$  e utilizando os conjuntos obtidos em (eq. 1), (eq. 2), (eq. 3) e (eq. 4), conclui-se que:

$$C = [\{-2\} \cup [1, +\infty)] \cup (-4, -3] \cup \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(-4, -\frac{5}{2}\right) \cup \\ \{-2\} \cup [1, +\infty)$$

**22)** Determine o conjunto **A** formado por todos os números complexos **z** tais que.

$$\frac{\bar{z}}{z-2i} + \frac{2z}{z+2i} = 3 \text{ e } 0 < |z-2i| \leq 1.$$

**SOLUÇÃO IDEAL**

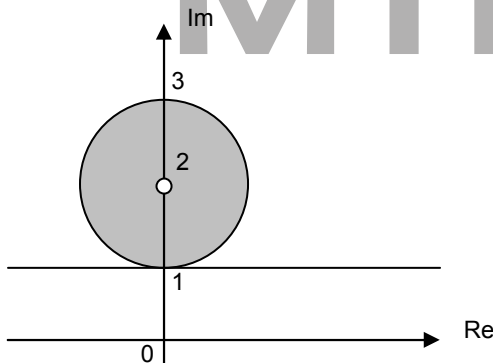
Inicialmente observamos que se  $W = \frac{\bar{z}}{z-2i}$  então

$$\bar{W} = \frac{z}{z+2i}.$$

Assim a equação proposta fica da forma  $W + 2\bar{W} = 3 \Rightarrow a + bi + 2a - 2bi = 3 \Rightarrow 3a - bi = 3 \Rightarrow a = 1$  e  $b = 0$ .

Logo:  $\frac{\bar{z}}{z-2i} = 1 \Rightarrow \bar{z} = z - 2i \Rightarrow x - yi = x + yi - 2i \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$  reta horizontal passando por  $Z = i$ .

Desde que  $0 < |z - 2i| \leq 1$  é um círculo (menos seu centro) centrado em  $2i$  e raio 1, a interseção é dada pela figura.



Desta forma, o único número complexo que satisfaz as duas equações é  $Z = i$ .

**23)** Seja  $k$  um número inteiro positivo e  $A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k \text{ e } \text{mdc}(j,k) = 1\}$ .

Verifique se  $n(A_3)$ ,  $n(A_9)$ ,  $n(A_{27})$  e  $n(A_{81})$ , estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

**SOLUÇÃO IDEAL**

Os números entre 1 e  $3^k$  que não são primos com  $3^k$  são todos os inteiros da forma  $3x$  ( $1 \leq x \leq 3k$ ). Ou seja, estes  $3^{k-1}$  inteiros são: 3, 2.3, 3.3, ...,  $(3^{k-1}).3$ , e todos os outros inteiros entre 1 e  $3^k$  são todos primos com  $3^k$ . Portanto  $n(A_{3^k}) = 3^k - 3^{k-1}$

Logo:  $n(A_3) = 3^1 - 3^0 = 2$

$$n(A_9) = 3^2 - 3^1 = 6 \\ n(A_{27}) = 3^3 - 3^2 = 18 \\ n(A_{81}) = 3^4 - 3^3 = 54$$

Assim, concluímos que estes números encontram-se em PG de razão 3.

**24)** Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

- a) Para que valores do parâmetro real  $p$  a equação admite raízes reais?
- b) Determine todas essas raízes reais.

**SOLUÇÃO IDEAL**

a) Análise inicial da equação  $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

(i) Como  $x$  é a soma de duas raízes quadradas, então  $x \geq 0$ .

(ii)  $x^2 \geq p$

(iii)  $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$  ou  $x \leq -1$  (não convém pois  $x \geq 0$ )

Para elevarmos ao quadrado os dois lados da equação  $\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$  devemos garantir que o lado direito é maior ou igual a zero:

$$(iv) x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow x \geq 2\sqrt{x^2 - 1} \quad x \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \geq 4x^2 - 4 \Rightarrow x^2 \leq \frac{4}{3}$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$4x\sqrt{x^2 - 1} = 4x^2 + (p - 4)$$

Uma vez que  $x \geq 0$  e  $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ , então  $4x\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ . Assim, temos que:

$$(v) 4x^2 + (p - 4) \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{4-p}{4}$$

Elevando ao quadrado mais uma vez:

$$16x^2(x^2 - 1) = 16x^4 + 8x^2(p - 4) + (p - 4)^2 \Rightarrow$$

$$8(p - 2)x^2 = -(p - 4)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}$$

De modo que o lado direito desta última igualdade seja maior ou igual a zero devemos ter:

$$(vi) p - 2 < 0 \Rightarrow p < 2 \quad (1)$$

De acordo com as restrições encontradas ao longo da determinação de  $x$  temos que  $\frac{4-p}{4} \leq x^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow$

$$\frac{4-p}{4} \leq \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \leq \frac{4}{3}$$

$$i) \frac{4-p}{4} \leq \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \Rightarrow (4-p) - \frac{(4-p)^2}{2(2-p)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(4-p)[2(2-p) - (4-p)]}{2(2-p)} \leq 0 \Rightarrow \frac{p(4-p)}{(2-p)} \geq 0$$

Como  $p < 2$  então  $p(4-p) \geq 0$ , ou seja,  $0 \leq p \leq 4$  (2)

$$ii) \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3(16-8p+p^2) - 32(2-p)}{24(2-p)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3p^2 + 8p - 16}{(2-p)} \leq 0 \quad p < 2 \Rightarrow 3p^2 + 8p - 16 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(3p - 4)(p + 4) \leq 0 \Rightarrow p \leq \frac{4}{3} \text{ ou } p \geq -4 \quad (3)$$

A interseção de (1), (2) e (3) é  $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ , que é o intervalo de valores de  $p$  no qual a equação admite raízes reais.

b) Desde que  $x \geq 0$ ,  $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$  e  $x^2 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}$ , então

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$$

25) Sendo  $x, y, z$  e  $w$  números reais, encontre o conjunto solução do sistema.

$$\begin{aligned} \log [(x+2y)(w-3z)^{-1}] &= 0, \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} &= 0, \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w-2} &= 0. \end{aligned}$$

**SOLUÇÃO IDEAL**

$$\log \frac{x+2y}{w-3z} = 0 \Rightarrow x+2y = w-3z, \text{ com } w \neq 3z \quad (1)$$

$$2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0 \Rightarrow 2^{x+3z} = 2^{y-3z+w+3} \Rightarrow$$

$$x+3z = y-3z+w+3 \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{2x+y+6z-2w-2} = 0 \Rightarrow 2x+y+6z-2w = 8 \quad (3)$$

$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z-w=0 \\ x-y+6z-w=3 \end{cases} \Rightarrow y-z = -1$$

$$(2) \text{ e } (3) \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y+12z-2w=6 \\ 2x+y+6z-2w=8 \end{cases} \Rightarrow 3y-6z=2$$

Resolvendo o sistema obtemos  $y = -\frac{8}{3}$  e  $z = -\frac{5}{3}$

Substituindo em (1):  $x-w = \frac{31}{3} \Rightarrow x = \frac{31}{3} + w$

Como  $w \neq 3z \Rightarrow w \neq -5$ .

Desta forma, chamando  $w = t$ ,  $t \in \mathbb{R} - \{-5\}$  temos que o conjunto solução do sistema é  $S = \left( \frac{31}{3} + t, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, t \right)$ , com

$t \neq -5$ .

26) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

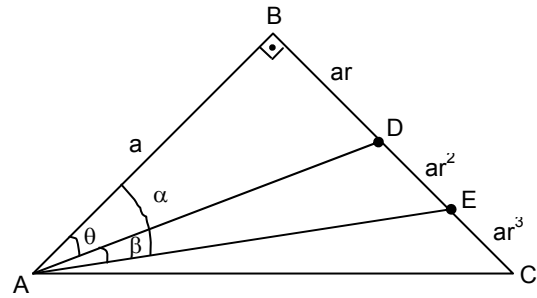
**SOLUÇÃO IDEAL**

Como existem 4 moças e 5 rapazes, a única situação em que uma comissão de 5 pessoas não possua pelo menos 1 moça e 1 rapaz é a comissão ser formada por 5 rapazes.

Logo, existem  $\binom{9}{5} - \binom{5}{5} = 125$  possibilidades.

27) Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado BC, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos BC, BD, DE, EC, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se  $\beta$  for o ângulo EAD, determine  $\text{tg}\beta$  em função da razão  $r$  da progressão.

**SOLUÇÃO IDEAL**



Seja  $a = AB = BC$ . Como a P.G.  $(BC, BD, DE, EC) = (a, ar, ar^2, ar^3)$ , tem-se a figura acima, em que  $\alpha$  e  $\theta$  são as medidas dos ângulos  $B\hat{A}E$  e  $B\hat{A}D$ , respectivamente. Nos triângulos retângulos ABD e ABE, vê-se que  $\text{tg}\theta = \frac{ar}{a} = r$  e  $\text{tg}\alpha = \frac{ar+ar^2}{a} = r+r^2$ . Além disso, com  $\frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$ , deve-se impor  $r+r^2+r^3 = 1$ . Portanto:

$$\text{tg}\beta = \text{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\theta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\theta} = \frac{r^2}{1+r^2+r^3} = \frac{r^2}{2-r}, \text{ em que } 0 < r < 1.$$

28) Considere, no plano cartesiano  $xy$ , duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , que se tangenciam exteriormente em P: (5, 10). O ponto Q: (10, 12) é o centro de  $C_1$ . Determine o raio da circunferência  $C_2$ , sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação  $x = y$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**

Como as circunferências são tangentes exteriormente, seus centros estão alinhados com o ponto de tangência e a distância entre eles é a soma dos raios.

O raio de  $C_1$  é  $R_1 = \sqrt{29}$ . A reta  $\overline{QP}$  é descrita pela equação  $2x - 5y + 40 = 0$ . Sendo  $Q'(a, b)$  o centro de  $C_2$  e  $R_2$  o seu raio, tem-se que:  $2a - 5b + 40 = 0 \quad (1)$

$$\sqrt{(a-10)^2 + (b-12)^2} = R_2 + \sqrt{29} \quad (2)$$

Além disso,  $C_2$  tangencia a reta  $x - y = 0$ . Logo:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = R_2 \quad (3)$$

De (1) chega-se a  $b = \frac{2a+40}{5} \quad (4)$ . Substituindo (4) em

$$(3): R_2 = \frac{|3a-40|}{5\sqrt{2}}. \text{ Como é óbvio, } a < 10. \text{ Então,}$$

$$R_2 = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \quad (5). \text{ Assim, da introdução de (4) e (5) em}$$

(2), obtém-se que:

$$\sqrt{(a-10)^2 + \left(\frac{2a-20}{5}\right)^2} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} + \sqrt{29} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(a-10)^2 + \frac{4}{25}(a-10)^2} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} + \sqrt{29} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{29(a-10)^2}{25}} - \sqrt{29} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(10-a)\sqrt{29}}{5} - \sqrt{29} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(5-a)\sqrt{29}}{5} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{5\sqrt{58}-40}{\sqrt{58}-3}$$

Enfim, utilizando (5):

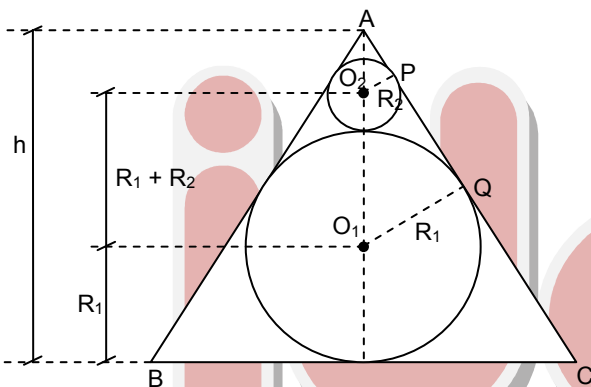
$$R_2 = \frac{40 - 3a}{5\sqrt{2}} = \frac{40 - 3\left(\frac{5\sqrt{58} - 40}{\sqrt{58} - 3}\right)}{5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{29}}{5\sqrt{2}(\sqrt{58} - 3)} = \frac{5\sqrt{29}}{5\sqrt{2}(\sqrt{58} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{58} + 3)}{\sqrt{2}(\sqrt{58} + 3)} \Leftrightarrow$$

$$R_2 = \frac{5(29\sqrt{2} + 3\sqrt{29})}{49}$$

29) Seja  $C_1$  uma circunferência de raio  $R_1$  inscrita num triângulo equilátero de altura  $h$ . Seja  $C_2$  uma segunda circunferência, de raio  $R_2$ , que tangencia dois lados do triângulo internamente e  $C_1$  externamente. Calcule  $(R_1 - R_2) / h$ .

**SOLUÇÃO IDEAL**



Os triângulos  $AO_2P$  e  $AO_1Q$  são semelhantes, sendo  $O_1$  e  $O_2$  os centros de  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e  $P$  e  $Q$  os pontos de tangências com um dos lados do triângulo equilátero  $ABC$ . Sendo  $x = AO_2$ , tem-se que:

$$\frac{x}{R_2} = \frac{x + R_1 + R_2}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow x = \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 - R_2} \quad (1)$$

Como  $O_1$  é o Baricentro do triângulo  $ABC$ ,  $R_1 = \frac{h}{3}$  e

$$R_1 + R_2 + x = \frac{2h}{3}. \text{ Com (1), conclui-se que:}$$

$$\frac{h}{3} + R_2 + \frac{R_2\left(\frac{h}{3} + R_2\right)}{\frac{h}{3} - R_2} = \frac{2h}{3} \Rightarrow R_2 = \frac{h}{9}$$

$$\text{Portanto: } \frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{2}{9}$$

30) Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume  $\frac{8}{3} \text{ cm}^3$ , encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

**SOLUÇÃO IDEAL**

As arestas do tetraedro formarão pares de diagonais reversas de faces opostas do cubo. Sendo  $\ell$  a medida da aresta do tetraedro, tem-se:

$$\frac{\ell^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{8}{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Denominando  $a$  a medida da aresta do cubo:

$$a\sqrt{2} = \ell = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

Assim, cada uma das oito esferas terá um octante no interior do cubo (e tangenciará outras três). O volume pedido é igual ao do cubo menos o de oito octantes (uma esfera), resultando em:

$$2^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \left(8 - \frac{4\pi}{3}\right) \text{ cm}^3$$

**Você perdeu o Concurso de Bolsas para as Turmas Militares do Colégio Ideal? Entre em contato com a coordenação para obter informações sobre outras datas para aplicação das provas de desconto.**

**Ideal Militar**  
Rua dos Mundurucus, 1412  
Tel: 32254176  
[www.grupoideal.com.br](http://www.grupoideal.com.br)

**Solução Ideal - ITA 2007 Matemática**

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

**Equipe de Matemática**

- Prof. Marcelo Rufino
- Prof. Márcio Pinheiro
- Prof. Manoel Leite
- Prof. Eurico Dias
- Prof. Alex Figueiredo