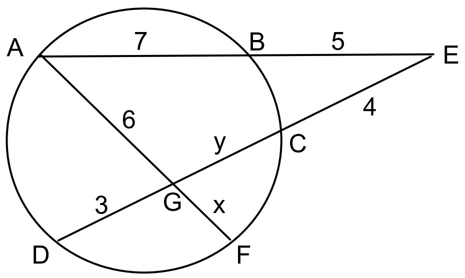
# GABARITO DE MATEMÁTICA DO ITA 2006

**1)** Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** D




Sejam $\overline{GF} = x$ e $\overline{GC} = y$, por potência de ponto temos:
EB . EA = EC . ED $\Rightarrow$ 5 . 12 = 4(7 + y) $\Rightarrow$ y = 8
Analogamente: GA . GF = GC . GD $\Rightarrow$ 6 . x = 8 . 3 $\Rightarrow$ x = 4

**2)** Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de P(U) com a seguinte propriedade:

Se A, B $\in$ S, então A $\subset$ B ou B $\subset$ A.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

a) $2^{n-1}$.
b) n/2, se n for par, e (n + 1)/2 se n for ímpar
c) n + 1 d) $2^n - 1$ e) $2^{n-1} + 1$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** C

**Solução 1:**
Analisemos alguns casos pequenos:
n = 1 $\Rightarrow$ U = {a} $\Rightarrow$ S possui no máximo 2 elementos: $\varnothing$ e {a}.
n = 2 $\Rightarrow$ U = {a, b} $\Rightarrow$ S possui no máximo 3 elementos, por exemplo: $\varnothing$, {a} e {a,b}.
n = 3 $\Rightarrow$ U = {a, b, c} $\Rightarrow$ S possui no máximo 4 elementos, por exemplo: $\varnothing$, {a} e {a,b}, {a, b, c}.

Suponhamos que se U possui K elementos então S = $S_k$ possui no máximo k+1 elementos. Por outro lado, se A $\subset$ B e n(A) = n(B), então teremos A = B.
Assim, quaisquer dois elementos distintos de S têm cardinalidade diferentes.
Inserindo mais um elemento em U, teremos o acréscimo de mais um membro ao número máximo de elementos de $S_{k+1}$, que é exatamente o obtido pela união do novo elemento de U com o elemento de maior cardinalidade de S. Logo, segue, por indução, que se U possui n elementos, então o número máximo de elementos de S é n+1.

**Solução 2:**
Inicialmente podemos observar que se A e B são dois conjuntos com mesma cardinalidade e A $\subset$ B então A = B. Portanto, podemos concluir que todos os elementos de S devem possuir cardinalidade distinta. Como este valor pode ir de 0 (conjunto vazio) até n, então o número máximo de elementos de S vale n + 1.

**3)** Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que n(B\A), n(A\B) e n(A $\cap$ B) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r > 0. Sabendo que n(B\A) = 4 e n(A $\cup$ B) + r = 64, então, n(A\B) é igual a

a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** B

Notando que os conjuntos A\B, B\A e A $\cap$ B são, dois a dois, disjuntos, pode-se afirma que:
n[(A\B) $\cup$ (B\A) $\cup$ (A $\cap$ B)] =
= n(A\B) + n(B\A) + n(A $\cap$ B) $\Leftrightarrow$
n(A $\cup$ B) = n(A\B) + n(B\A) + n(A $\cap$ B) $\Leftrightarrow$
64 – r = n(A\B) + n(B\A) + n(A $\cap$ B) (I)

Como os números n(B\A), n(A\B) formam uma P.A. de razão r > 0, nesta ordem, e n(B\A) = 4, pode-se escrever: $\begin{cases} n(A \setminus B) = 4 + r & \text{(II)} \\ n(A \cap B) = 4 + 2r & \text{(III)} \end{cases}$

Substituindo (II) e (III) em (I):
64 – r = 4 + r + 4 + 4 + 2r $\Leftrightarrow$ 4r = 52 $\Leftrightarrow$ r = 13
Daí, em (II): n(A\B) = 17

**4)** Seja f: IR $\to$ IR definida por f(x) = $\sqrt{77}$ sen[5(x + $\pi$/6)] e seja B o conjunto dado por B = {x $\in$ IR: f(x) = 0}. Se m é o maior elemento de B $\cap$ ($-\infty$, 0) e n é o menor elemento de B $\cap$ (0, $+\infty$), então m + n é igual a

a) $2\pi/15$ b) $\pi/15$ c) $-\pi/30$
d) $-\pi/15$ e) $-2\pi/15$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** E

B é o conjunto das raízes de f.

f(x) = $\sqrt{77}.\text{sen}\left(5x + \frac{5\pi}{6}\right)$ =0 $\Leftrightarrow$ 5x + $\frac{5\pi}{6}$ = k$\pi$, k $\in$ Z $\Leftrightarrow$

x = $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5}$

Logo: B = {x $\in$ IR: x = $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5}$, para algum k $\in$ Z}.

Sejam M = B $\cap$ ($-\infty$, 0) e N = B $\cap$ (0, $+\infty$). Isto significa que M é o conjunto dos elementos negativos de B e N é o conjunto dos elementos positivos de B. Além disso:

$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} < 0 \Leftrightarrow \frac{k}{5} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow k < \frac{5}{6}$, para que x $\in$ M.

$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{5}{6}$, para que x $\in$ N.

Como x é função crescente de k, tem-se que:

(maior elemento de M) = m = $-\frac{\pi}{6} + 0.\frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6}$ (pois k < $\frac{5}{6}$ e k $\in$ Z)

(menor elemento de N) = n = $-\frac{\pi}{6} + 1.\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{30}$ (já que k > $\frac{5}{6}$ e k $\in$ Z)

Portanto: m + n = $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{30}=-\frac{2\pi}{15}$

**5)** Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

a) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ b) $(-\infty,-1) \cup (1, +\infty)$
c) $(-1, 1)$ d) $(0, \infty)$ e) $(-\infty, +\infty)$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** C

Seja $a^x = y$ (I)
Note-se que $y > 0$.

A equação fica: $\dfrac{y-\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{y}}m \Leftrightarrow \dfrac{y^2-1}{y^2+1} = m \Leftrightarrow$

$(m - 1)y^2 + m + 1 = 0$ (II)

Para que haja raízes reais, deve-se impor que:
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-4).(m-1).(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$
$-1 \leq m \leq 1$

Se m =1, porém, a equação (II) não tem solução. E se m = –1, ocorreria y = 0, o que não convém.

Caso $m \in (-1,1)$, a equação (II) teria como soluções:

$y = \pm\sqrt{\frac{m+1}{1-m}}$, ambas reais. Como y deve ser positivo, apenas $y = \sqrt{\frac{m+1}{1-m}}$ serve, gerando a solução final

$x = \log_a \sqrt{\frac{m+1}{1-m}}$, que é um número real, se $m \in (-1,1)$

**6)** Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4.30$ b) $4^3.60$ c) $5^3.60$ d) $\binom{7}{3}.4^3$ e) $\binom{10}{7}$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** A

Número de formas de escolher as 7 questões que vai acertar: $\binom{10}{7}$.

Para cada uma destas 7 questões existe uma possibilidade de escolha para a alternativa que deve ser marcada.

Para cada uma das 3 questões que devem estar erradas, existem 4 possibilidades para escolha da alternativa que deve ser marcada.

Assim, o total de possibilidades é $\binom{10}{7} . 1^7 . 4^3 =$

$= 120. 4^3 = 30 . 4^4$.

**7)** Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101}\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right)$:

I – S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

II – S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3.

III – S = 3451.

IV – $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

a) I e III b) II e III c) II e IV
d) II e) III

**SOLUÇÃO:**
**ALTENATIVA:** B

I – Falsa

$$\frac{\log_8\left(4^{k+1}\sqrt{2}\right)}{\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right)}=\frac{\log_8\left(2^{2k+2}.2^{1/2}\right)}{\log_8\left(2^{2k}.2^{1/2}\right)}=\frac{\log_8\left(2^{2k+\frac{5}{2}}\right)}{\log_8\left(2^{2k+\frac{1}{2}}\right)}=$$

$= \log_{2^{2k+\frac{1}{2}}}\left(2^{2k+\frac{5}{2}}\right)=\dfrac{2k+5/2}{2k+1/2}$, que não é constante para K variando no conjunto {0,1, ..., 101}.

II – Verdadeira. De fato: $\log_8\left(4^{k+1}\sqrt{2}\right)-\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right)=$

$=\log_8\left(\dfrac{4^{k+1}\sqrt{2}}{4^k\sqrt{2}}\right)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\dfrac{2}{3}$, que é a razão (constante) da P.A

$\left(\log_8\sqrt{2},\log_8\left(4\sqrt{2}\right),\log_8\left(16\sqrt{2}\right),...,\log_8\left(4^{101}\sqrt{2}\right)\right)$

III – Verdadeira. Em verdade: $S = \sum_{k=0}^{101}\log_8\left(4^k\sqrt{2}\right)=$

$$=\log_8\left[\prod_{k=0}^{101}\left(4^k\sqrt{2}\right)\right]=\log_8\left[\prod_{k=0}^{101}\left(2^{2K+\frac{1}{2}}\right)\right]=\log_8\left[2^{\sum_{k=0}^{101}\left(2k+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\log_8 2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{405}{2}\right)\cdot\frac{102}{2}}=\log_{2^3}2^{203.51}=\frac{203.51}{3}=3451$$

IV . Falsa. $3434 + \log_8\sqrt{2}=3434+\log_{2^3}2^{1/2}=$

$=3434+\dfrac{1}{6}<3451=S$

Portanto, apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

**8)** Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}\,f(z) + f(1)\,\overline{f(z)}$ é igual a

a) 1 b) 2z c) 2 Re z
d) 2 Im z e) $2|z|^2$.

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** C

**Solução 1:**

Lembrando que $|w|^2 = w.\overline{w}, \quad \forall w \in C$, Tem-se que :

$[f(z)-f(1)].\left[\overline{f(z)-f(1)}\right]=|f(z)-f(1)|^2 \Leftrightarrow$

$$[f(z)-f(1)].[f(\overline{z})-f(\overline{1})]=|z-1|^2$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(z)}-f(z).\overline{f(1)}-f(1).\overline{f(z)}+f(1).\overline{f(1)}=|z-1|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(z)|^2+|f(1)|^2-|z-1|^2=f(2).\overline{f(1)}+f(1).\overline{f(z)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)}+f(1).f(\overline{z})=|z|^2+|1|^2-|2-1|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)}+f(1).f(\overline{z})=z.\overline{z}+1-(z-1).\overline{(z-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)}+f(1).f(\overline{z})=z.\overline{z}+1-(z-1).(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)}+f(1).f(\overline{z})=z.\overline{z}+1-z.\overline{z}+z+\overline{z}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)}+f(1).f(\overline{z})=z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$$

**Solução 2:**

Sejam f(1) = a + bi (a e b fixos), z = x + yi (x e y variáveis) e f(z) = c + di (c e d variáveis)

Para z = 1 temos |f(1)| = 1 $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = 1$

|f(z)| = |z| $\Rightarrow$ $c^2 + d^2 = x^2 + y^2$

|f(z) – f(1)| = |z – 1| $\Rightarrow$ $(c - a)^2 + (d - b)^2 = (x - 1)^2 + y^2$ $\Rightarrow$

$c^2 + a^2 - 2ac + b^2 + d^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$ $\Rightarrow x = ac + bd$

$\overline{f(1)}\, f(z) + f(1)\, \overline{f(z)}$ = (a – bi)(c + di) + (a + bi)(c – di) =

= ac + bd + i(ad – bc) + (ac + bd) – i(ad + bc) =

= 2(ac + bd) = 2x = 2Re(z)

**9)** O conjunto solução de $(\mathrm{tg}^2x - 1)(1 - \mathrm{cotg}^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$, é

a) $\{\pi/3 + k\pi/4,\ k \in Z\}$
b) $\{\pi/4 + k\pi/4,\ k \in Z\}$
c) $\{\pi/6 + k\pi/4,\ k \in Z\}$
d) $\{\pi/8 + k\pi/4,\ k \in Z\}$
e) $\{\pi/12 + k\pi/4,\ k \in Z\}$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** D

**Solução 1:**

$$\left(\frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}-1\right)\left(1-\frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x}\right)=4 \quad \Rightarrow$$

$(\mathrm{sen}^2x - \cos^2x)^2 = (2\ \mathrm{sen}\ x \cdot \cos x)^2$ $\Rightarrow$

$\cos^2 2x = \mathrm{sen}^2 2x \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ $\Rightarrow$

$$\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k \in Z.$$

**Solução 2:**

Sabe-se que $\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$. Logo:

$$(\mathrm{tg}^2x-1)\left(1-\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}\right)=4 \quad \Rightarrow$$

$$(\mathrm{tg}^2x - 1)^2 = 4\mathrm{tg}^2x = (2\mathrm{tg}\ x)^2 \ \overset{\mathrm{tg}x\neq 1}{\Rightarrow} \ \left(\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\ 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k \in Z.$$

**10)** Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\ \mathrm{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

a) $2n\alpha$ é múltiplo de $2\pi$.
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de $2\pi$.
c) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$.
d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2.
e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de $\pi$.

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** B

Se Z é um número complexo com argumento $\alpha$ então $Z = |Z|(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\ \alpha)$.

Pela 1ª Lei de Moivre: $Z^n = |Z|^n (\cos n\alpha + i.\mathrm{sen}\ n\alpha) \Rightarrow$

$$\left(\frac{Z}{|Z|}\right)^n = \cos(n\alpha) + i.\mathrm{sen}(n\alpha) \Rightarrow \cos(n\alpha) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in Z) \Rightarrow 2n\alpha - \pi = 2k\pi \quad \Rightarrow$$

$2n\alpha - \pi$ é múltiplo de $2\pi$.

**11)** A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases} \text{é}$$

a) $a - b \neq 2$
b) $a + b = 10$
c) $4a - 6b = 0$
d) $a/b = 3/2$
e) $a \cdot b = 24$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** A

Escalonando o sistema temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-6 & b-4 \end{pmatrix}$$

Como o sistema deve ser incompatível, devemos ter $a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$ e $b - 4 \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$.

Logo $a - b \neq 2$.

**12)** Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} \text{ é igual a}$$

a) 0
b) 4
c) 8
d) 12
e) 16

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** D

Usando no segundo determinante propriedades adequadas, temos:

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = (-6)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (-6)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-12)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-12).(-1) = 12$$

**13)** Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1 – i como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e – 40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

a) $3/2 - \sqrt{193}/6$, 3, $3/2 + \sqrt{193}/6$
b) $2 - 4\sqrt{13}$, 2, $2 + 4\sqrt{13}$
c) – 4, 2, 8 d) –2, 3, 8 e) –1, 2, 5

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** E

Do enunciado tem-se:
$p(x) = [x - (1 - i)]^2.[x - (1+i)]^2.(x - \alpha).(x - \beta).(x - \theta)$, onde $\alpha$, $\beta$ e $\theta$ são as raízes reais de p(x).
Usando as relações de Albert Girard:
$1 - i + 1 - i + 1 + i + 1 + i + \alpha + \beta + \theta = 10 \Rightarrow$
$\alpha + \beta + \theta = 6$ (I)
$(1 - i)^2.(1 + i)^2.\alpha.\beta.\theta = -40 \Rightarrow \alpha\beta\theta = -10$ (II)

Como $(\alpha, \beta, \theta)$ é uma PA, então $\alpha + \theta = 2\beta$ e substituindo em (I) e em (II):
$$\begin{cases} 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha + \theta = 4 \\ \alpha\theta = -5 \end{cases}$$
Resolvendo este sistema temos: $\alpha = -1$, $\theta = 5$.

**14)** Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que
a) x = 2 não é raiz de p.
b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

**SOLUÇÃO :**
**ATERNATIVA**: E

**Solução 1:**
Como 2 é raiz de p(x) então:
$p(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$
Por outro lado: $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 =$
$= (x^4 - x^3 + x^2) + 3(x^3 - x^2 + x) + (x^2 - x + 1) =$
$= x^2(x^2 - x + 1) + 3x(x - x + 1) + (x^2 - x + 1) =$
$= (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)$
Logo, as raízes de p(x) são:
$$2, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

**Solução 2:**
Pesquisando as raízes racionais, conclui-se que 2 é raiz. Daí, dividindo, obtém-se que:
$P(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1) = (x - 2).\ Q(x)$
As raízes de q(x) podem ser obtidas aproveitando a "simetria dos coeficientes em relação aos extremos (com exceção do coeficiente de $-x^2$).
Como "0" não é raiz, dividindo-se a equação q(x) = 0 por $x^2$ e agrupando-se os termos eqüidistantes dos extremos:
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$
Fazendo $x + \frac{1}{x} = t$:
$(t^2 - 2) + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$t = -3$ ou $t = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3$ ou $x + \frac{1}{x} = 1 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$
$x^2 + 3x + 1 = 0$ e $x^2 - x + 1 = 0$, que geram outras 4 raízes: 2 irracionais; 2 não reais.

**15)** Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por
$$\begin{cases} (a - b)x - (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:
I – O sistema é possível e indeterminado se a = b = 0.
II – O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.
III – $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas
a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** E
I) Se $a = b = 0 \Rightarrow 0.x - 0.y = 0 \neq 1$ (F)

II) $\begin{vmatrix} a - b & -(a+b) \\ a + b & (a - b) \end{vmatrix} = (a - b)^2 + (a + b)^2$
$= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(a^2 + b^2) \neq 0$, se a e b não forem simultaneamente nulos, o que torna o sistema possível e determinado.(V)

III) Se a e b não são simultaneamente nulos, temos que
$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \Rightarrow$
$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{-1}$ (V)

**16)** Considere o polinômio $p(x) = x_3 - (a + 1)$, onde $a \in$ Z. O conjunto de todos os valores de *a*, para os quais o polinômio *p* (x) só admite raízes inteiras, é
a) {2n, n ∈ IN} b) { $4n^2$,n ∈ IN}
c) {6n – 4n, n ∈ IN} d) {n (n +1), n ∈ IN}
e) IN

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** D

Observando que 1 é raiz de p(x): $x^3 - (a + 1)x + a =$
$= (x - 1)(x^2 + x - a)$.
Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes de $x^2 + x - a$, $x_1$ e $x_2 \in$ Z.
Assim: $x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - x_1$.
Logo: $a = x_1x_2 = x_1(x_1 + 1)$
Fazendo $x_1 = n$, temos: $a = n(n + 1)$, $n \in$ Z.

**17)** Numa circunferência $C_1$ de raio $r_1$ = 3 cm está inscrito um hexágono regular $H_1$, em $H_1$ está inscrita uma circunferência $C_2$, em $C_2$ está inscrito um hexágono regular $H_2$ e, assim, sucessivamente. Se $A_n$ (em $cm^2$) é a área do hexágono $H_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em $cm^2$) é igual a
a) $54\sqrt{2}$ b) $54\sqrt{3}$
c) $36(1+\sqrt{3})$ d) $27/(2+\sqrt{3})$
e) $30(2+\sqrt{3})$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** B

Sejam $r_n$ e $r_{n+1}$ os raios dos círculos $C_n$ e $C_{n+1}$, respectivamente.

Então, $r_{n+1} = \dfrac{r_n\sqrt{3}}{2}$, o que indica que os raios estão em P.G. de razão $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e primeiro termo $r_1 = 3$.

Como a área de um hexágono de lado $\ell$ é dada por $A = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

$A_n = \dfrac{3{r_n}^2\sqrt{3}}{2}$, pois o lado do hexágono é igual ao raio do círculo circunscrito.

$\dfrac{A_{n+1}}{A_n} = \left(\dfrac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} =$ q. Daí, as áreas dos hexágonos formam uma P.G. de razão $\dfrac{3}{4}$ e primeiro termo $A_1 = \dfrac{3.3^2.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ cm².

Assim: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-q} = \frac{27\sqrt{3}\big/2}{1-3\big/4} = 54\sqrt{3}$ cm².

**18)** Sejam a reta s: 12x – 5y +7 = 0 e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A Reta *p*, que é perpendicular a *s* e é secante a *C*, corta o eixo O*y* num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo.

a) $\left(-\dfrac{91}{12}, -\dfrac{81}{12}\right)$ b) $\left(-\dfrac{81}{12}, -\dfrac{74}{12}\right)$

c) $\left(-\dfrac{74}{12}, -\dfrac{30}{12}\right)$ d) $\left(\dfrac{30}{12}, \dfrac{74}{12}\right)$

e) $\left(\dfrac{75}{12}, \dfrac{91}{12}\right)$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** Não há alternativa correta

Sendo p $\perp$ s e s: 12x – 5y + 7 = 0 então
p: 5x + 12y + k = 0.
A equação reduzida da circunferência é:
$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$, ou seja, a circunferência possui centro em (– 2, – 1) e raio 4.
Assim, para que p seja secante à circunferência:

$$\frac{|\,5(-2)+12(-1)+k\,|}{\sqrt{5^2+12^2}} < 4 \;\Rightarrow\; |k-22| < 52 \;\Rightarrow$$

$-52 < k - 22 < 52 \;\Rightarrow\; -30 < k < 74$
Quando a reta p cortar o eixo Oy, tem-se que:
$5.0 + 12.y + k = 0 \;\Rightarrow\; k = -12y$
Assim: $-30 < k < 74 \;\Rightarrow\; -30 < -12y < 74 \;\Rightarrow$

$-\dfrac{74}{12} < y < \dfrac{30}{12}$.

**19)** Os focos de uma elipse são $F_1$ (0, - 6). Os pontos A (0, 9) e B(x,3), x > 0, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, $F_1$ e $F_2$ é igual a

a) $22\sqrt{10}$ b) $18\sqrt{10}$ c) $15\sqrt{10}$
d) $12\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** D

Como os focos são $F_1(0, -6)$ e $F_2$ (0, - 6), então a equação da elipse é $\lambda: \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, onde **b** é o semi-eixo menor e **a** é o semi-eixo maior.
Substituindo o ponto A (0,9), tem-se que $a^2 = 81$ e, utilizando a relação $a^2 - c^2 = b^2$, então $b^2 = 45$, ou seja:

$\lambda: \dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

Sabendo que B(x,3) pertence a λ, então $x = 2\sqrt{10}$, isto é $B\left(2\sqrt{10},3\right)$.

A área procurada é dada por $\Delta = \dfrac{1}{2}.|D|$, onde

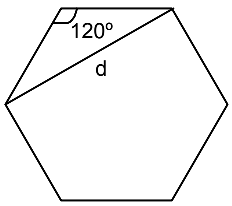
$D = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \\ 2\sqrt{10} & 3 \end{bmatrix}$, logo $\Delta = 12\sqrt{10}$ u.a

**20)** Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60º com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm², é

a) $81\sqrt{3}/2$ b) $81\sqrt{2}/2$ c) 81/2
d) $27\sqrt{3}$ e) $27\sqrt{2}$

**SOLUÇÃO:**
**ALTERNATIVA:** A

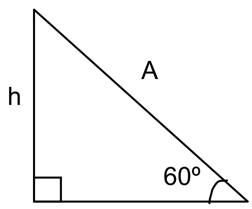
Considerando a figura abaixo e empregando a lei do cossenos temos:




$d^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell.\ell\left(-\dfrac{1}{2}\right) \;\Rightarrow$

$d = \ell\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \ell\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 3$cm

A base (a), a altura (h) e o apótema da pirâmide (A) formarão o triângulo.




Desde que a = A cos 60º e como

$a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ temos $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = A.\dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 3\sqrt{3}$

Assim: $S_t = pA + S_B = 9.\,3\sqrt{3} + 6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow$

$S_t = 27\sqrt{3} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$ cm²

**21)** Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elemento. Dizemos que F = {$A_1$, ...,$A_m$} $\subset$ P (A) é uma **partição de** A se as seguintes condições são satisfeitas:

I . $A_i \neq \emptyset$, i = 1, ...., m

II . $A_i \cap A_J = \emptyset$, se $i \neq j$, para i, j = 1,..., m

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição **de ordem** K se $n(A_I) = k$, i = 1,m. Supondo que n (A) = 8, determine:
a) As ordens possíveis para uma partição de A
b) O número de partições de A que têm ordem 2

**SOLUÇÃO:**

**a)** Suponha-se a partição $F = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$. Se ela tem ordem k, então $n(A_i) = k$, i = 1, 2, ..., m, isto é, $n(A_1) = n(A_2) = ... = n(A_m) = k$.
De acordo com a definição dada de partição:
I) $k \neq 0$, pois $A_i \neq \emptyset$, i = 1, ..., m.
II) $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para i, j = 1, ..., m.
Logo: $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_m)$
III) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = A \Rightarrow n(A) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_m)$

Como a ordem da partição é k:
$n(A) = m.k = 8 \Rightarrow k|8$, pois m e k são naturais positivos. Logo, os possíveis valores de k são 1, 2, 4, 8.

**b)** Basta contar o número de modos de separar 8 elementos distintos em 4 conjuntos de dois elementos cada.
Observe-se que a partição $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{A_2, A_1, A_4, A_3\}$.
Para encontrar a quantidade procurada, x, pode-se utilizar a seguinte seqüência de decisões sucessivas:
**Decisão 1:** Formar um conjunto com 2 elementos $\to C_{8,2}$ modos.
**Decisão 2:** Formar outro conjunto com 2 elementos $\to C_{6,2}$ modos.
**Decisão 3:** Formar um 3º conjunto com 2 elementos $\to C_{4,2}$ modos.
**Decisão 4:** Formar um 4º conjunto com 2 elementos $\to C_{2,2}$ modos.

Pelo princípio multiplicativo, o número procurado seria: $C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}$. Como a ordem relativa entre os conjuntos de uma mesma família não interessa:

$C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 4!\,X \Leftrightarrow x = \dfrac{8!}{4!(2!)^4} = 105.$

**22)** Seja *f*: [0, 1) → IR definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2X & 0 \le x < 1/2 \\ 2x-1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

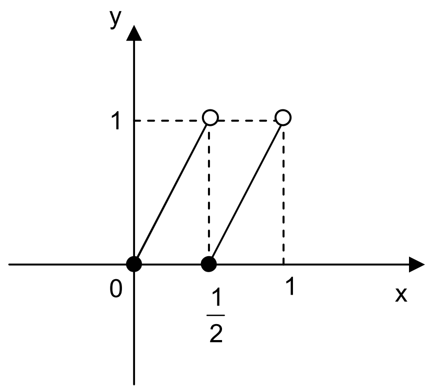
Seja g: (–1/2, 1/2) → IR dada por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1-f(x+1/2) & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$$, com f definida acima.

Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

**SOLUÇÃO:**

**Solução 1:**
O gráfico de f é esboçado a seguir:



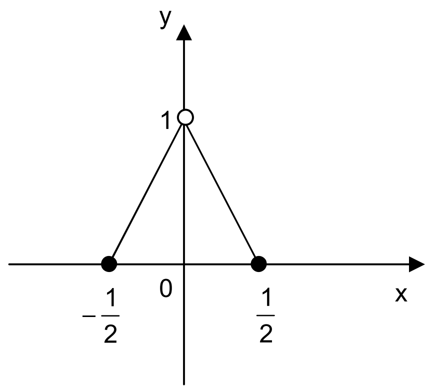

Lembrando que, graficamente:

1) $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ translada horizontalmente o gráfico de f(x), em $\frac{1}{2}$ unidade para a esquerda;

2) $-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ reflete o gráfico de $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$, em relação ao eixo x;

3) $1-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ translada verticalmente o gráfico de f(x), em 1 unidade para cima;

Obtém-se o esboço do gráfico de g:




Sendo o gráfico de g simétrico em relação ao eixo y, tem-se que g é **par**, isto é, g(–x) = g(x), $\forall\, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

**Solução 2:**
Pelos dados fornecidos temos que

$$f(x+1/2) = \begin{cases} 2x+1, & -1/2 \le x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < 1 \end{cases}.$$

Assim, segue que $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x, & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$.

Logo, $g(-x) = \begin{cases} 2(-x)+1, & 0 \le x < 1/2 \\ 1-2(-x), & -1/2 \le x < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$g(-x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2x+1, & -1/2 \le x < 0 \end{cases}$$

Portanto, temos que g(x) = g(– x), implicando que a função g é par.

**23)** Determine o coeficiente de $x^4$ no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

**SOLUÇÃO:**

$(1+x+x^2)^9 = \underbrace{(1+x+x^2)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2)}_{9}$

A menos da ordem, existem 3 maneiras de obter um termo $x^4$ como multiplicação de 9 termos que podem ser 1, x ou $x^2$:

I) dois termos $x^2$, sete termos 1 e nenhum termo x. O número de termos $x^4$ que podem ser obtidos desta maneira é igual ao número de permutações de $x^2\ x^2$ 1111111, ou seja, vale $\frac{9!}{2!.7!} = 36$.

II) quatro termos x, cinco termos 1 e nenhum termo $x^2$. O número de termos $x^4$ assim obtidos equivale ao número de permutação de x x x x 1 1 1 1 1, ou seja, vale $\frac{9!}{4!.5!} = 126$.

III) um termo $x^2$, dois termos x e seis termos 1. Neste caso existem $\frac{9!}{2!.6!} = 252$ possibilidades.

Portanto, no total existem 36+126+252 = 414 maneiras distintas de obter $x^4$. Logo, o coeficiente de $x^4$ é 414.

**24)** Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade: $\log_{\cos x}(4\text{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2$.

**SOLUÇÃO:**

Condição de Existência:

$4\text{sen}^2 x - 1 > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ (I)

Condição de Existência:

$4 - \sec^2 x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ (II)

Desenvolvendo a inequação:

$\log_{\cos x}(4\,\text{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2$

$\log_{\cos x}\left(\frac{4\,\text{sen}^2 x - 1}{4 - \sec^2 x}\right) > \log_{\cos x}\cos^2 x \Leftrightarrow$

$\frac{4\text{sen}^2 x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x \Rightarrow \frac{4\text{sen}^2 x - 1 - 4\cos^2 x + 1}{4 - \sec 2x} < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(-4)\cos(2x)}{4 - \sec^2 x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(2x)}{4 - \sec^2 x} > 0$

Como $4 - \sec^2 x > 0$, pela condição de existência, deve-se impor que cos 2x > 0.

Já que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), 2x \in (-\pi; \pi)$.

Neste intervalo, cos 2x > 0 quando $2x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (III)

Portanto, a solução é dada pela interseção de (I), (II) e (III).

S = $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

**25)** Considere o polinômio $p(x) = x^3+ax^2+x+1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

**SOLUÇÃO:**

Sejam p, q e r as raízes de $x^3 + ax^2 + x + 1$

Suponhamos que $p - q \in Q$

**1ª Possibilidade:** $p \in Q$

Temos diretamente que $q \in Q \Rightarrow p + q \in Q$

Uma vez que $p + q + r = a \Rightarrow r = a - (p + q) \Rightarrow$

$r \in Q \Rightarrow$ afirmativa verdadeira.

**2ª Possibilidade:** $q \in Q$ (caso análogo ao anterior) $\Rightarrow$ afirmativa verdadeira.

**3ª Possibilidade:** $r \in Q$ (*)

Desde que $p + q + r = a \Rightarrow p + q = a - r \Rightarrow$

$p + q \in Q$ (**)

Assim, temos que $(p + q) + (p - q) \in Q \Rightarrow 2p \in Q \Rightarrow$

$p \in Q \Rightarrow q \in Q \Rightarrow$ afirmativa verdadeira.

**26)** As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em $m^2$.

**SOLUÇÃO:**

Do enunciado: (R, h, g) é uma PA, onde R = raio da base; h = altura do cone e g = geratriz.

Como a razão dessa PA é 2, então:

R = h – 2 e g = h + 2.

Usando a relação notável: $g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow$

$(h + 2)^2 = h^2 + (h - 2)^2 \Rightarrow 4h = h^2 - 4h \Rightarrow$

h = 8, logo: g = 10 e R = 6

A área total é dada por:

$A_T = \pi R^2 + \pi Rg \Rightarrow A_T = 36\pi + 60\pi = 96\pi\ m^2$.

**27)** Sejam as matrizes

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e

B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$

Determine o elemento $C_{34}$ da matriz $C = (A+B)^{-1}$.

**SOLUÇÃO:**

Calculando A + B temos:

A + B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Calculando det A + B:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \,.\, 11 = 99$$

$$x = (A + B)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cof}(x_{34}) = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \,.\, 9 = -18$$

O elemento $C_{34}$ da inversa de A + B será:

$$C_{34} = \frac{-18}{99} = -\frac{2}{11}$$

**28)** Seja $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n,\ldots})$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de a + r.

**SOLUÇÃO:**

Sendo $(a, ar, ar^3, ar^4,\ldots,ar^{n-1},\ldots) = (a_1, a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n,\ldots)$ Do enunciado tem –se :

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = 4 \Rightarrow ar + ar^3 + \ldots = 4 \Rightarrow \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = \frac{16}{13} \Rightarrow ar^2 + ar^5 + \ldots - = \frac{16}{13}$$

$$a + ar + ar^3 + \ldots = 4 \Rightarrow \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$$ar^2 + ar^5 + ar^8 + \ldots = \frac{16}{13} \Rightarrow \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13} \Rightarrow \frac{4r}{1-r^3} = \frac{16}{13}$$

$$13r(1 - r) = 4(1 - r^3) \;\Rightarrow\; 9r^3 - 13r + 4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$(r - 1)(9r^2 + 9r - 4) = 0 \;\overset{r>0}{\Rightarrow}\; S = \{1, 1/3\}$$

i) r = 1 (não serve)

ii) $r = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{32}{3}$. Logo a + r = 11

**29)** Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y - 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole. Calcule sua distância focal.

**SOLUÇÃO:**

Completado os quadrados obtemos: $\dfrac{(y-8)^2}{\frac{144}{9}} - \dfrac{(x-7)^2}{\frac{144}{16}} = 1$

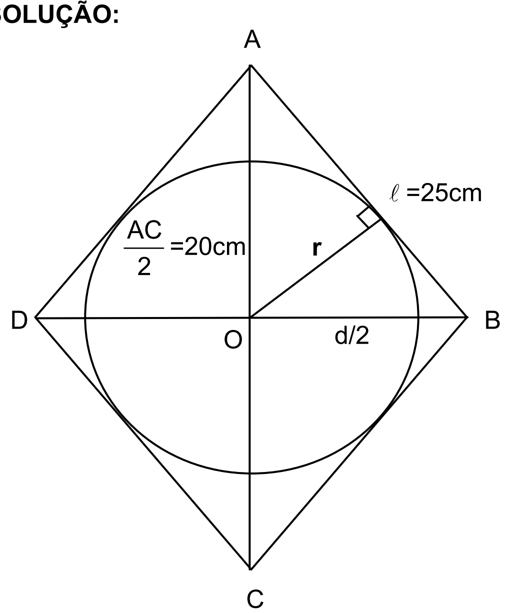
Lembrando da relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$, então:

$$c^2 = \frac{144.25}{9.16} \Rightarrow c = 5.$$

Logo 2c (distância focal) = 10.

**30)** Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100cm e cuja maior diagonal mede 40cm. Calcule a área, em $cm^2$, do círculo inscrito neste losango.

**SOLUÇÃO:**




1) $2p = 100 = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{100}{4} = 25$cm.

2) AC = 40cm $\Rightarrow \frac{AC}{2} = 20$cm.

3) $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \;\Rightarrow\; \frac{d}{2} = \sqrt{225} = 15.$

4) O raio do círculo inscrito é a altura do $\Delta$ retângulo AOB, logo:

$$25r = 15 \times 20 \Rightarrow r = \frac{15x20}{25} = \frac{300}{25} = 12\text{cm}.$$

Logo a área do círculo será:

$S_0 = \pi r^2 = \pi.12^2 = 144\pi$ $cm^2$.

**Solução Ideal – ITA 2006 Matemática**

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

***Equipe de Matemática***
Prof. Marcelo Rufino
Prof. Márcio Pinheiro
Prof. Jefferson França
Prof. Manoel Leite
Prof. Fernando Correa
Prof. Alex Figueiredo