GABARITO DE MATEMÁTICA DO ITA 2005

1) Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0, 1} e as afirmações:
I – $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II – $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III – Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
IV – Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.
Então, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas IV. c) apenas I e IV.
d) apenas II e III. e) apenas III e IV.

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: B
I – Falso. Na verdade $\{0\} \subset S$
II – Falso. Visto que $0 \notin T$, na verdade $S \cap T \cap U = \varnothing$
III – Falso. A função $f : S \to T$ possui 4 elementos no domínio, o contra domínio possui 3 elementos. Assim, sempre existirá $x_i \neq x_j$, tal que $f(x_i) = f(x_j)$, ou seja, não existe $f : S \to T$ injetiva.
IV – Verdadeiro. Como T possui 3 elementos, então no máximo, a imagem de T em S terá 3 elementos. Mas S possui 4 elementos, o que nos dá sempre a imagem diferente do contra-domínio, ou seja, nenhuma função $f : T \to S$ é sobrejetiva.

2) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50 b) R$ 16,50 c) R$ 12,50
d) R$ 10,50 e) R$ 9,50

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: D
Sejam: x = preço de um sanduíche
y = preço de uma xícara de café
z = preço de um pedaço de torta
Pelo enunciado:
$3x + 7y + z = 31{,}5$ e $4x + 10y + z = 42$
Multiplicando a 1ª equação por 3 e subtraindo da 2ª equação multiplicada por 2 obtemos: $x + y + z = 10{,}5$.

3) Uma circunferência passa pelos pontos A = (0, 2), B = (0, 8) e C = (8, 8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
a) (0, 5) e 6 b) (5, 4) e 5 c) (4, 8) e 5,5
d) (4, 5) e 5 e) (4, 6) e 5

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: D
Observando que ΔABC é retângulo, então o circuncentro está no ponto médio da hipotenusa $\overline{AC}$ e o circunraio é igual a metade da hipotenusa: C = (4, 5) e R = 5.

4) Sobre o número $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que
a) $x \in]0, 2[$ b) x é racional c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional e) $x \in]2, 3[$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: B
$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, elevando ao quadrado ambos os lados e igualando as partes racionais e irracionais:
$$\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ b=3 \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$
Logo: $x = (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2$

5) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB})$ = 8 cm, $m(\overline{AC})$ = 10 cm, $m(\overline{AD})$ = 4 cm e $m(\overline{AE})$ = 6 cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{3}{4}$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: D
Como a área de um triângulo é dada pelo semi produto dos lados pelo seno do ângulo entre eles, então:
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{AD}.\overline{DE}}{\overline{AB}.\overline{AC}} = \frac{4.6}{8.10}\frac{3}{10}$$

6) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: C
A mediana relativa a hipotenusa é metade da medida da hipotenusa. Seja **a** a hipotenusa, **b** e **c** os catetos:
$$\frac{a^2}{4} = b.c \Rightarrow \frac{a}{c} = 4.\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = 4.\cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$$
Logo, θ = 15º ou 75º
$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

7) A circunferência inscrita num triângulo eqüilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)
a) $3\sqrt{3}$ b) 6 c) 5 d) 4 e) $2\sqrt{5}$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: C
Sejam:
R = raio da esfera
r = raio da circunferência inscrita no triângulo eqüilátero.
d = distância entre o centro da esfera e o plano que contém o triângulo.
D = distância entre o centro da esfera e os vértices do triângulo.

Como o triângulo é eqüilátero, o raio da circunferência inscrita é igual a um terço da altura: $r = \frac{1}{3}\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
Como o centro da esfera, o centro do triângulo e um dos pontos de tangência da esfera com o triângulo formam um triângulo retângulo: $R^2 = r^2 + d^2 \Rightarrow 16 = 3 + d^2 \Rightarrow d^2 = 13$.
Como o centro da esfera, o centro do triângulo eqüilátero e um dos vértices do triângulo formam um triângulo retângulo: $D^2 = (2r)^2 + d^2 = 12 + 13 = 25 \Rightarrow D = 5$ cm

8) Uma esfera de raio *r* é seccionada por *n* planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então *n* é igual a

a) 4 b) 3 c) 6 d) 5 e) 7

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: C
A soma da P.A de **n** termos será igual à metade do volume da esfera.

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1).r]n}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\left[2.\frac{\pi r^3}{18} + (n-1).\frac{\pi r^3}{45}\right].n}{2} \Rightarrow$$

$n^2 + 4n - 60 = 0 \Rightarrow n = -10$ (não convém) ou $n = 6$
O número de planos **n** é o número de termos da P.A.

9) Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a
a) 11 b) 32 c) 10 d) 20 e) 22

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: E
Seja **n** o número de vértices de uma das bases. Como a soma dos ângulos internos de cada face lateral é 360º e de cada base é 180º(n – 2) temos:
$360º.n + 2(180º(n-2)) = 7200º \Rightarrow n = 11$
Como o número de vértices do prisma é o dobro do número de vértices de cada base: N = 22.

10) Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por A = (0, 0), B = (2, 2) e C = $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

a) $\frac{8}{3}$ b) 3 c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e) 8

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: A
Como A, B e C são vértices do tetraedro regular e estão no mesmo plano, então eles formam um triângulo eqüilátero de lado $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$.
O volume de um tetraedro de aresta **a** é dado por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Assim: $V = \frac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{8}{3}$

11) No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: A
Do enunciado $p(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$.
Como a soma dos coeficientes é igual a p(1):
$(a - 2b + c + 1)^5 = 32$
Supondo que os coeficientes são todos reais:
$a - 2b + c + 1 = 2 \Rightarrow a - 2b + c = 1$ **(1)**
$p(0) = 0 \Rightarrow c = -1$ **(2)**
$p(-1) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -1$ **(3)**
Resolvendo o sistema formado pelas equações (1), (2) e (3):
$a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = -1$. Assim: $a + b + c = -\frac{1}{2}$

12) O menor inteiro positivo **n** para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
a) 2499 b) 2501 c) 2500 d) 3600 e) 4900

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: B

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \sqrt{n} < \frac{1}{100} + \sqrt{n-1}$$

Elevando ao quadrado (os dois lados são positivos)

$$n < \frac{1}{10000} + \frac{\sqrt{n-1}}{50} + n - 1 \Rightarrow \sqrt{n-1} > \frac{9999}{200}$$

$$\Rightarrow n - 1 > \left(\frac{9999}{200}\right)^2 \Rightarrow n > 2500{,}5 \Rightarrow n_{min} = 2501$$

13) Seja D = IR \ {1} e f : D → D uma função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
Considere as afirmações:
I – f é injetiva e sobrejetiva.
II – f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III – $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.
IV – f(x) . f(–x) = 1, para todo $x \in D$.
Então, são verdadeiras:
a) apenas I e III. b) apenas I e IV c) apenas II e III
d) apenas I, III e IV e) apenas II, III e IV

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: A
Sejam a e b $\in$ D tal que f(a) = f(b) $\Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} \Rightarrow$
$ab - a + b - 1 = ab + a - b - 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ f é injetiva.
Seja c $\in$ D tal que f(x) = c $\Rightarrow c = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{c+1}{c-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow f\left(\frac{c+1}{c-1}\right) = c$ (c $\neq$ 1), ou seja, se quisermos obter como imagem um certo número c $\in$ D, basta fazer $x = \frac{c+1}{c-1}$.
Deste modo, para qualquer valor c do contra-domínio existe um x tal que f(x) = c $\Rightarrow$ f é sobrejetiva.
Item **I** verdadeiro Item **II** falso

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -\frac{x+1}{x-1}, \text{ para } x \neq 1 \text{ e } x \neq 0$$

Assim $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow$ Item **III** verdadeiro

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}, \text{ para } x \neq -1$$

Assim f(x) . f(–x) = 1 para $x \neq 1$ e $x \neq -1$ $\Rightarrow$ Item **IV** falso

14) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio
$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$
com p, q $\in$ IR. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é
a) 4 b) –4 c) 6 d) 5 e) –5

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: E
Como 2 + i é raiz, então 2 – i será raiz e as demais serão raízes reais. Pela relação de Girard, temos:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow x_3 + x_4 = -5$

15) Considere a equação em x: $a^{x+1} = b^{1/x}$, onde **a** e **b** são números reais positivos, tais que ln b = 2 ln a > 0. A soma das soluções da equação é
a) 0 b) –1 c) 1 d) ln 2 e) 2

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: B
Logaritmando a equação na base neperiano, temos:
$$(x+1).\ln = \frac{1}{x}.\ln b \Rightarrow x+1 = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
A soma das soluções é a soma das raízes da equação:
$x_1 + x_2 = -b/a = -1$

16) O intervalo $I \subset IR$ que contém todas as soluções da inequação $\arctan\frac{1+x}{2} + \arctan\frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$ é
a) [–1, 4] b) [–3, 1] c) [–2, 3] d) [0, 5] e) [4, 6]

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: C
Se $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1+x}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{4}{3+x^2}$
Como tg x é uma função crescente, então:
$$\alpha+\beta \geq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4}{3+x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
Resolvendo a inequação: $x \in \left[\sqrt{4\sqrt{3}-3};\sqrt{4\sqrt{3}-3}\right]$
O intervalo que contém a resposta é: [–2, 3]

17) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor
a) maior que 1, para todo w com |w| > 1.
b) menor que 1, para todo w com |w| < 1.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para |w| crescente, com |w| < |z|.

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: D
Desde que |z| = 1, podemos multiplicar a expressão por |z| sem alterar seu valor:
$$\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right| = \frac{|z||1-\bar{z}w|}{|z-w|} = \frac{|z-z.\bar{z}w|}{|z-w|} = \frac{\left|z-|z|^2w\right|}{|z-w|} = \frac{|z-w|}{|z-w|} = 1,$$ se $z \neq w$, para todo w.

18) O sistema linear
$$\begin{cases} bx+y=1 \\ by+z=1 \\ x+bz=1 \end{cases}$$
não admite solução se e somente se o número real **b** for igual a
a) –1 b) 0 c) 1 d) 2 e) –2

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: A
Escalonando:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}(-b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & -b^2 & 1-b \\ 0 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}(-b)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & -b^2 & 1-b \\ 0 & 0 & 1+b^3 & 1-b+b^2 \end{pmatrix}$$
Para que o sistema seja impossível:
$1 + b^3 = 0$ e $1 - b + b^2 \neq 0 \Rightarrow b = -1$.

19) Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é
a) 0,21 b) 0,25 c) 0,28 d) 0,35 e) 0,40

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: E
$$P_1 = \frac{C_{11,3}}{C_{16,3}} = \frac{165}{560} \qquad P_2 = \frac{C_{4,3}+C_{5,3}+C_{7,3}}{C_{16,3}} = \frac{49}{560}$$
$$P_1 + P_2 = \frac{214}{560} \approx 0{,}3821...$$
O valor mais próximo de $P_1 + P_2$ é a alternativa E

20) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,
a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$
d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUÇÃO IDEAL
ALTERNATIVA: E (Ver comentário)
Supondo que a elipse tem eixo maior vertical, então sua equação é dada por: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Substituindo os pontos (1; 0) e (0; –2), tem-se: $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, logo $c^2 = 3$, ou seja, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $2c = 2\sqrt{3}$
Comentário: Na verdade existem infinitas elipses (com valores distintos de distância focal e excentricidade) com centro na origem e que passam por (1, 0) e (0, - 2). A falta de clareza no enunciado gerou uma questão que admite infinitas soluções. A solução apresentada acima corresponde ao que, provavelmente, a banca elaboradora imaginou da questão.

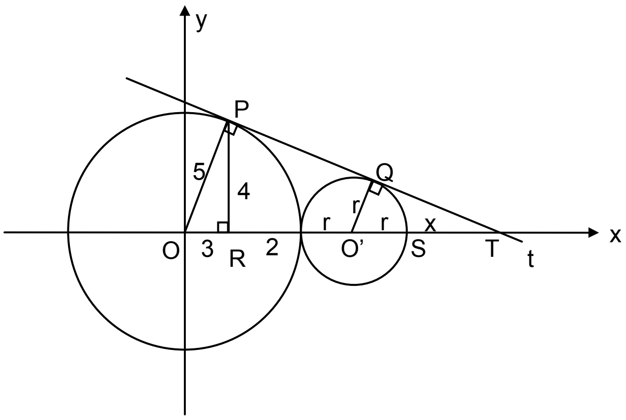
21) Seja $a_1, a_2,...$ uma progressão aritmética infinita tal que $\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, para $n \in \mathbb{N}^*$.
Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

SOLUÇÃO IDEAL
Fazendo n = 1: $\sum_{k=1}^{1} a_{3k} = a_3 = \sqrt{2} + \pi$

Para n = 2: $\sum_{k=1}^{2} a_{3k} = a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_6 = (2\sqrt{2}+4\pi) - (\sqrt{2}+\pi) \Leftrightarrow a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$
Como se trata de uma P.A.:
$a_6 = a_3 + 3r \Leftrightarrow 3r = 2\pi \Leftrightarrow r = \frac{2\pi}{3}$
Além disso: $a_3 = a_1 + 2r \Leftrightarrow a_1 = (\sqrt{2}+\pi) - \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

22) Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se **t** é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo **x** e tangente simultaneamente à reta **t** e à circunferência C.

SOLUÇÃO IDEAL



OP = $\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\Delta POR \sim \Delta QO'T \Rightarrow \dfrac{x+r}{r}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow 2r = 3x \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}r$ **(I)**

$\Delta POR \sim \Delta POT \Rightarrow \dfrac{x+2r+5}{5}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow 3x + 6r = 10$ **(II)**

De (I) e (II): $r=\dfrac{5}{4}$. Portanto: OO' = 5 + r = $\dfrac{25}{4}$

Logo: C': $\left(x-\dfrac{25}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{16}$

23) Sejam A e B matrizes 2x2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que

a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ **b)** A é inversível

SOLUÇÃO IDEAL

Sabe-se que:
1) O produto de uma matriz por sua inversa é a identidade.
2) Quando se multiplica uma matriz quadrada pela identidade o resultado é a própria matriz.
3) Se o produto de duas matrizes quadradas é a identidade, ambas tem inversa.

Baseado nestas afirmações temos:
a) $AB = BA \Rightarrow A = BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$.
b) $A^2 + 2AB - B = 0 \Rightarrow A^2 + 2AB = B$
Multiplicando por B^{-1} à direita temos:
$A^2B^{-1} + 2A = I \Rightarrow A(AB^{-1} + 2I) = I \Rightarrow$ A tem inversa.

24) Seja **n** o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n – 1 ângulos (internos) do polígono é 2004º, determine o número **n** de lados do polígono.

SOLUÇÃO IDEAL

Seja θ o ângulo interno do polígono que está excluído da soma dos n – 1 ângulos internos do polígono.
Assim: $S(n-1) + \theta = S(n) \Rightarrow 2004º + \theta = 180º(n-2) \Rightarrow$
$\theta = 180ºn - 2364º$
Desde que θ é um ângulo interno: $0 < \theta < 180º \Rightarrow$
$0 < 180ºn - 2364º < 180º \Rightarrow 2364º < 180ºn < 2544º \Rightarrow$
$13{,}1333... < n < 14{,}1333...$ Como **n** é inteiro $\Rightarrow n = 14$.

25) a) Mostre que o número real $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

SOLUÇÃO IDEAL

a) Fazendo $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, então:

$a^3=2+\sqrt{5}$ e $b^3=2-\sqrt{5}$, lembrando que:

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, pode-se escrever que:

$x^3=4+3x.\sqrt[3]{4-5} \Rightarrow x^3=4-3x \Rightarrow x^3+3x-4=0$

b) As possíveis raízes racionais de $x^3 + 3x - 4 = 0$, são da forma $\dfrac{p}{q}$, onde **p** é um divisor de – 4 e **q** é um divisor de 1, ou seja, as possíveis raízes são: {$\pm1, \pm2, \pm4$}.
Substituindo, conclui-se que 1 é raiz, logo α = 1, ou seja, α é racional.

26) Considere a equação em $x \in IR$

$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$, sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro **m**.
b) Determine todos os valores de **m** para os quais a equação admite solução não nula.

SOLUÇÃO IDEAL

a) $\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx} \Rightarrow \sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}=x$ (1)
Elevando ao quadrado:

$1+mx-2\sqrt{1-m^2x^2}+1-mx=x^2 \Rightarrow$

$2-x^2=2\sqrt{1-m^2x^2}$ (2)

Elevando novamente ao quadrado:
$4 - 4x^2 + x^4 = 4 - 4m^2x^2 \Rightarrow x^2(x^2 + 4m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ou $x=2\sqrt{1-m^2}$ ou $x=-2\sqrt{1-m^2}$ (3)

b) Observemos que x = 0 é sempre solução da equação, independentemente do valor de m. Vamos analisar os possíveis valores de m de modo que a equação possua outras soluções, além de x = 0.
De (3) temos que: $1 - m^2 > 0 \Rightarrow -1 < m < 1$ (4)
De (2) temos que $2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (5)
i) Analisemos inicialmente os possíveis valores de $m \geq 0$.
A partir da equação (1) podemos observar que para $m \geq 0$ poderemos ter x positivo ou negativo, uma vez que se x > 0 ($m \geq 0$) temos $\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}>0$ e se x < 0 ($m \geq 0$) temos $\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}<0$.
Se x > 0 temos 1 + mx > 0. Entretanto, se x < 0 devemos analisar para que valores de m teremos $1 + mx \geq 0 \Rightarrow$

$1-2m\sqrt{1-m^2}\geq 0 \Rightarrow 2m\sqrt{1-m^2}\leq 1$.

Elevando ao quadrado (observe que os dois lados são > 0):
$4m^2(1 - m^2) \leq 1 \Rightarrow 4m^4 - 4m^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow (2m^2 - 1)^2 \geq 0$, que é satisfeita para qualquer valor de m real.
O caso em que x > 0 e $1 - mx \geq 0$ é idêntico.

De (1): $1 + mx \geq 0$ e $1 - mx \geq 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{x}\leq m\leq\dfrac{1}{x}$ (6)

Assim, de (5) e (6) temos que: $m\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $m\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (7)

Conseqüentemente: (7) $\cap$ (4) $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq m<1$

ii) Se m < 0, temos que a equação (1) não admite solução real, uma vez que se x < 0 teremos $\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}>0$ e se x >0 teremos $\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}<0$.
Portanto, teremos solução, além de x = 0, para a equação se $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq m<1$.

27) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

SOLUÇÃO IDEAL
São formados dois cones de revolução coaxiais de mesma base. Sejam $\sqrt[3]{2}$, b, a e h as medidas dos catetos, da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa do triângulo dado, respectivamente.

$$V = \frac{\pi h^2 a}{3} = \pi \Leftrightarrow a = \frac{3}{h^2} \quad \textbf{(I)}$$

Utilizando relações métricas:

$$a.h = b.c \Rightarrow h.\frac{3}{h^2} = \sqrt[3]{2}.b \Leftrightarrow b = \frac{3}{h\sqrt[3]{2}} \quad \textbf{(II)}$$

Pelo Teorema de Pitágoras e usando (I) e (II):

$$a^2 = b^2 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{h^4} = \frac{9}{h^2.\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{16}.h^4 + 9h^2 - 9\sqrt[3]{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{-9 \pm 15}{2\sqrt[3]{16}} \overset{h>0}{\Rightarrow} h^2 = \frac{3}{3\sqrt{16}}.$$

Daí, em (I): $a = \dfrac{3}{\frac{3}{\sqrt[3]{16}}} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

Como a hipotenusa $\left(2\sqrt[3]{2}\right)$ é o dobro de um cateto, conclui-se que os ângulos do triângulo retângulo são: 30º, 60º e 90º.

28) São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

SOLUÇÃO IDEAL (1ª solução)
Numeremos as faces, colocando os números 1 e 2 no cartão todo vermelho (um número em cada face) e os números 3 e 4 no cartão que possui uma face vermelha (número 3) e outra face azul (número 4).
Analisemos todas as possibilidades de um cartão ficar com a face vermelha exposta:
I) Face exposta: 1; Face oposta: 2
II) Face exposta: 2; Face oposta: 1
III) Face exposta: 3; Face oposta: 4
Deste modo, das 3 possibilidade de face exposta vermelha, em duas delas a face oposta é vermelha, ou seja, $p = \frac{2}{3}$.

2ª solução:
evento A = a face oposta é vermelha
evento B = a face exposta é vermelha

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

29) Obtenha todos os pares (x, y), com x, y $\in$ [0, 2π], tais que
$$\begin{cases} \text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO IDEAL
Usando a fórmula de soma de senos, tem-se o seguinte sistema: $\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x \cos y = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases}$

Deste sistema, percebe-se que sen x e cos y são raízes da equação: $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$, que resolvida, dá: $\text{sen}\,x = \cos y = \frac{1}{2}$, ou seja, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$ e $y = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$.

Desta forma, os pares de respostas são:
$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right)$

30) Determine todos os valores reais de **a** para os quais a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas.

SOLUÇÃO IDEAL

$$(x-1)^2 = (x-a) \overset{(x-1)^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x - a = (x-1)^2 \text{ ou } x - a = -(x-1)^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + a + 1 = 0$ ou $x^2 - x + 1 - a = 0$.

Para que haja exatamente três soluções distintas, deve ocorrer uma das seguintes possibilidades:

I) $x^2 - 3x + a + 1 = 0$, admite uma raiz dupla e
$x^2 - x + 1 - a = 0$, admite duas raízes distintas, diferentes da dupla anterior.

Assim: $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 4(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ é raiz dupla da 1ª equação. Para este valor de **a**, a 2ª equação fica $x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$, cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

II) $x^2 - x + 1 - a = 0$, admite uma raiz dupla e
$x^2 - 3x + a + 1 = 0$, admite duas raízes distintas, diferentes da dupla anterior.

Daí: $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ é raiz da dupla da 1ª equação. Para tal valor de **a**, a outra equação fica $x^2 - 3x + \frac{7}{4} = 0$, que possui as raízes $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

III) Ambas as equações possuem uma única raiz, α, comum.
Neste caso: $\alpha^2 - 3\alpha + a + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 - a\ (= 0) \Leftrightarrow \alpha = a$.
Substituindo numa das equações:
$a^2 - 3a + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.
Dessa forma, para que a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ possua exatamente três raízes distintas, deve-se ter:
$a = \frac{5}{4}$ ou $a = \frac{3}{4}$ ou a = 1.

Solução Ideal - ITA 2005 Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do **Ideal Militar**

Equipe de Matemática
Prof. Marcelo Rufino — Prof. Márcio Pinheiro
Prof. Jefferson França — Prof. Manoel Leite Carneiro
Prof. Alexandre Sampaio