1) Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto **U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**:
I - $\varnothing \in$ U e n (U) = 10.
II - $\varnothing \subset$ U e n (U) = 10.
III – 5 $\in$ U e {5} $\subset$ U.
IV – {0, 1, 2, 5} $\cap$ {5} = 5
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s).
a) apenas I e III b) apenas II e IV c) apenas II e III d) apenas IV e) todas as afirmações

Solução IDEAL (Alternativa C)

I) Falsa. $\varnothing$ não é elemento de U
II) Verdadeira. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto
III) Verdadeira. O **elemento** 5 pertence a U e o **conjunto** {5} está contido em U.
III) Falsa. Na verdade {0, 1, 2, 5}$\cap${5} = {5}

2) Seja o conjunto **S = { r** $\in \mathbb{Q}$: r $\geq$ 0 e $r^2 \leq 2$}, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:
I - $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$
II - $\{x \in \mathfrak{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$
III - $\sqrt{2} \in S$
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas.
a) I e II b) I e III c) II e III d) I e) II

Solução IDEAL (Alternativa D)

S = {r$\in$Q : r $\geq$ 0 e $r^2 \leq 2$} $\Rightarrow$ S = {r$\in$Q : 0 $\leq$ r < $\sqrt{2}$ }

I) Verdadeira. Notemos que $\frac{5}{4}$ e $\frac{7}{5}$ $\in$ Q. Também $0 \leq \frac{5}{4} < \sqrt{2}$ e $0 \leq \frac{7}{5} < \sqrt{2}$

II) Falsa. {x $\in\mathfrak{R}$: 0 $\leq$ x $\leq \sqrt{2}$ } $\cap$ {r$\in$Q : 0 $\leq$ r < $\sqrt{2}$ } = {r$\in$Q : 0 $\leq$ r < $\sqrt{2}$ } = S que é diferente do conjunto vazio.

III) Falsa. $\sqrt{2} \notin$ Q, logo $\sqrt{2} \notin$ S

3) Seja α um número real, com **0 < α < 1**. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de **x** tais que

$$\boldsymbol{\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1}.$$

a)] - ∞, 0] $\cup$ [2, + ∞[b)] - ∞, 0[$\cup$]2, + ∞[c)]0, 2[d)] - ∞, 0[e)]2, + ∞[

Solução IDEAL (Alternativa C)

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1 \Rightarrow \alpha^{2x-x^2} < \alpha^0 \overset{(0<\alpha<1)}{\Rightarrow} 2x - x^2 > 0 \Rightarrow \quad S =]0,2[$$

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, **$f$(x) = 2 cos x + 2i sen x**. Então, $\forall$**x, y** $\in \mathbb{R}$, o valor do produto **f(x) f(y)** é igual a:
a) f(x + y) b) 2f(x + y) c) 4if (x + y) d) f (xy) e) 2f (x) + 2if (y)

Solução IDEAL (Alternativa B)

f(x)f(y) = (2cosx + 2isenx)(2cosy + 2iseny) = 4cosxcosy – 4senxseny + 4icosxseny + 4isenxcosy $\Rightarrow$
f(x)f(y) = 4cos(x+y) + 4isen(x+y) $\Rightarrow$ f(x)f(y) = 2f(x+y)

5) Considere **12 pontos** distintos dispostos no plano, **5** dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, **2** destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

Solução IDEAL (Alternativa A)

Como existem 5 pontos alinhados, então existem $C_{5,3}$ combinações que não formam triângulos.
Assim o número de combinações que formam triângulos são todas as combinações de 12 tomadas 3 a 3 subtraídas das combinações que não formam triângulos: $C_{12,3} - C_{5,3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2} - \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2} = 210$

6) Seja **x** $\in \mathbb{R}$ e a matriz **A =** $\begin{bmatrix} \mathbf{2^x} & \mathbf{(x^2+1)} \\ \mathbf{2^x} & \mathbf{\log_2 5} \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

a) $\forall$x $\in \mathbb{R}$, A possui inversa.

b) Apenas para x > 0, A possui inversa.
c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.
d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.
e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

Solução IDEAL (Alternativa A)

Tiramos diretamente que: $\det A = 2^x(\log_2 5 - (x^2+1)^{-1})$.

Como $2^x \neq 0\ \forall\ x \in \Re$, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \log_2 5 - (x^2+1)^{-1} \neq 0 \Rightarrow \log_2 5 \neq \dfrac{1}{x^2+1}$

Como $\log_2 5 > 1$ e $\dfrac{1}{x^2+1} < 1$, $\forall\ x \in \Re$, então a desigualdade acima é verdadeira $\forall \ \in \Re$.

Ou seja, $\det A \neq 0$, $\forall\ x \in \Re$. Logo A possui inversa.

7) Considerando as funções **arc sen:** $[-1,+1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e **arc cos: [-1, +1] → [0, π]**, assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\dfrac{3}{5} + \text{arccos}\dfrac{4}{5}\right)$.

a) $\dfrac{6}{25}$ b) $\dfrac{7}{25}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{5}$ e) $\dfrac{5}{12}$

Solução IDEAL (Alternativa B)

Seja $\text{sen}x = \dfrac{3}{5}$ com $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$. Analogamente, $\cos y = \dfrac{4}{5}$ com $y \in [0,\pi] \Rightarrow \text{sen}y = \dfrac{3}{5}$

Assim, $\cos(\text{arcsen}\dfrac{3}{5} + \text{arccos}\dfrac{4}{5}) = \cos(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{25}$

8) Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a **5°**. Então, seu maior ângulo mede, em graus.

a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

Solução IDEAL (Alternativa E)

A soma dos ângulos internos do polígono é igual a: $S_n = (n-2)180 \Rightarrow S_9 = 7\cdot 180 \Rightarrow S_9 = 1260$

A soma dos ângulos internos em PA é dada por $S_9 = \dfrac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2} = 1260 \Rightarrow a_1 + a_9 = 280 \Rightarrow (a_9 - 8\cdot 5) + a_9 = 280 \Rightarrow a_9 = 160$

9) O termo independente de **x** no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\dfrac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

Solução IDEAL (Alternativa E)

O termo geral de um binômio $(a+b)^n$ é dado por $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}\right)^{12-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^k \Rightarrow T_{k+1} = \binom{12}{k}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{12-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^k \left(x^{1/6-1/2}\right)^{12-k}\left(x^{1/3-1/6}\right)^k$$

Para obtermos o termo independente, temos que ter: $-\dfrac{1}{3}(12-k) + \dfrac{1}{6}\cdot k = 0 \Rightarrow k = 8$

Substituindo k = 8 , temos : $T_9 = \binom{12}{8}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{12-8}\left(-\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}\right)^8 \Rightarrow T_9 = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{25}{9}\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}\right)^2 \Rightarrow$

$$T_9 = 495\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}} \Rightarrow T_9 = 495\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow T_9 = 495\cdot\frac{\sqrt[3]{75}}{3} \Rightarrow T_9 = 165\sqrt[3]{75}$$

10) Considere as afirmações dadas a seguir, em que **A** é uma matriz quadrada **n x n**, **n ≥ 2**:

I – O determinante de **A** é nulo se e somente se **A** possui uma linha ou uma coluna nula.
II – Se $\mathbf{A = (a_{ij})}$ é tal que $\mathbf{a_{ij} = 0}$ para **i > j**, com **i, j = 1, 2, ..., n**, então $\mathbf{\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}}$.

III – Se **B** for obtida de **A**, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então **det B = det A**.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s).
a) apenas II b) apenas III c) apenas I e II d) apenas II e III e) todas

Solução IDEAL (Alternativa D)

I – Falsa. A matriz $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ possui determinante zero e nenhuma linha ou coluna é nula.

II – Verdadeira. Aplicando o Teorema de Laplace sucessivamente na matriz $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ encontramos que det A = $a_{11}.a_{22}...a_{nn}$.

III – Verdadeira. Pelas propriedades de determinante: $= (\sqrt{\ } +)(\sqrt{\ } -)$ $\Rightarrow$ det B = det A

11) Considere um cilindro circular reto, de volume igual a **360π cm^3**, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de **$54\sqrt{3}$ cm^3**, então, a área lateral da pirâmide mede, em **cm^2**.

a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$ d) $108\sqrt{427}$ e) $45\sqrt{427}$

Solução IDEAL (Alternativa A)

Seja ℓ e a aresta da base da pirâmide. Como esta base é um hexágono, então ℓ é igual ao raio R da circunferência que é base do cilindro.

$S_{hex} = 6\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 54\sqrt{3} = 6\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell = 6$ cm

$V_{cil} = \pi R^2 h_{cil} \Rightarrow 360\pi = 36\pi h_{cil} \Rightarrow h_{cil} = 10$ cm $\Rightarrow h_{pir} = 20$ cm

Se g é o valor da altura de cada face lateral da pirâmide: $g^2 = (h_{pir})^2 + \left(\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{400+27} = \sqrt{427}$ cm

Assim: $A_L = 6\dfrac{\ell.h_{pir}}{2} = 6\dfrac{6.\sqrt{427}}{2} \Rightarrow A_L = 18\sqrt{427}$ cm^2

12) O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em **x**) $\mathbf{x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + tg\alpha = 0}$ são todas reais, é:

a) $\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right]$ b) $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Solução IDEAL (Alternativa D)

Fazendo uma troca de variável do tipo $x^2 = y$, temos que a equação fica na forma $y^2 - \sqrt[4]{48}\,y + tg\,\alpha = 0$.

Para que haja raízes reais é necessário que $\Delta = \sqrt{48} - 4\,tg\alpha \geq 0$, ou seja, $tg\,\alpha \leq \sqrt{3}$. De acordo com o enunciado e com a conclusão anterior temos que o intervalo procurado é $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

13) Sejam as funções f e **g** definidas em $\mathbb{R}$ por f**(x) = $x^2 + \alpha x$** e **g(x) = - ($x^2 + \beta x$)**, em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que:

f		G	
Valor mínimo	Ponto de mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-1	< 0	$\dfrac{9}{4}$	> 0

Então, a soma de todos os valores de **x** para os quais **(fog) (x) = 0** é igual a:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Solução IDEAL (Alternativa D)

Como o valor mínimo de f é –1, então tem-se que $\alpha = \pm 2$, porém, como o ponto de mínimo é negativo, então $\alpha = 2$.

Sabendo que o valor máximo de **g** é $\dfrac{9}{4}$, temos que $\beta = \pm 3$, porém, como o valor de máximo é positivo, então $\beta = -3$.

Diante das conclusões anteriores, temos que $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = -x^2 + 3x$.

$fog(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow (-x^2 + 3x)^2 + 2(-x^2 + 3x) = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x = 0$, cuja soma das raízes é 6.

14) Considere todos os números **z = x + iy** que têm módulo $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a:

a) $\dfrac{25}{9}$ b) $\dfrac{49}{16}$ c) $\dfrac{81}{25}$ d) $\dfrac{25}{7}$ e) 4

1ª Solução IDEAL (Alternativa B)

Sabendo que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (1)

Isolando x^2 na equação da elipse e substituindo em (1), temos: $\sqrt{4 - 3y^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, que resolvida dá: $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, logo $x = \pm 1$.

Estes valores irão nos gerar 4 números complexos que são: $z_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_4 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$P = z_1z_2z_3z_4 = \left(1 + \dfrac{3}{4}\right)\left(1 + \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{49}{16}$

2ª Solução IDEAL

Notemos que existem 4 soluções, uma vez que o raio da circunferência é maior que o semi-eixo menor. Pela simetria, as soluções são dois pares de números complexos conjugados, ou seja, $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$.

Assim: $z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2 = |z|^4 = \dfrac{49}{16}$.

15) Para algum número real **r**, o polinômio $\mathbf{8x^3 - 4x^2 - 42x + 45}$ é divisível por $\mathbf{(x - r)^2}$. Qual dos números abaixo está mais próximo de **r**?

a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

Solução IDEAL (Alternativa B)

Sendo r a raiz dupla da equação, então r deve ser raiz simples da equação derivada:
$24x^2 - 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x - 21 = 0$, cujas raízes são 3/2 e – 7/6.
Deve-se, agora, verificar qual desses dois valores é raiz da equação original, o que é facilmente feito por Briot-Ruffini. Conclui-se que r = 3/2 = 1,50.

16) Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos **(x, y)** do plano satisfazem a equação

$$\mathbf{det}\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{288}.$$

a) Uma elipse b) Uma parábola c) Uma circunferência d) Uma hipérbole e) Uma reta

Solução IDEAL (Alternativa C)

Pelo teorema de Jacobi, adicionando a quarta linha, previamente multiplicada por –1, às três primeiras linhas, o determinante não se altera e a equação fica:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow 3.3.\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & -1 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & -1 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 32$$

Utilizando o teorema de Laplace na última coluna, a equação finalmente assume a forma:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 32 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0,$$
que é a equação de uma **circunferência**, de centro (2,3) e raio 5.

17) A soma das raízes da equação $\mathbf{z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0,\ z \in \mathbb{C}}$, é igual a:

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

Solução IDEAL (Alternativa A)

A equação dada é equivalente a: $z^3 + z^2 - z.\bar{z} + 2z = 0 \Leftrightarrow z.(z^2 + z - \bar{z} + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 + z - \bar{z} + 2 = 0$.
Fazendo z = x + yi, com x e y reais, a segunda possibilidade fica:

$(x^2 - y^2 + 2) + (2xy + 2y)i = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -2$ e $y(x+1) = 0$. Na segunda equação, há duas possibilidades:
a) y = 0. Nesta situação, a primeira equação fica: $x^2 + 2 = 0$, que não convém.
b) x = − 1. Aqui, a primeira equação assume a forma $y^2 = 3$. Daí: $y = \pm\sqrt{3}$.
As raízes da equação são, portanto: z = 0, $z = -1 + i\sqrt{3}$ e $z = -1 - i\sqrt{3}$, cuja soma vale – 2.

18) Dada a equação $\mathbf{x^3 + (m + 1)\, x^2 + (m + 9)\, x + 9 = 0}$, em que **m** é uma constante real, considere as seguintes afirmações:
I – Se **m** ∈ **] –6, 6[**, então existe apenas uma raiz real.
II – Se **m = -6** ou **m = +6**. então existe raiz com multiplicidade **2**.
III - ∀ **m** ∈ ℝ, todas as raízes são reais.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas.
a) I b) II c) III d) II e III e) I e II

Solução IDEAL (Alternativa E)

Inicialmente, perceba-se que, para todo m complexo, – 1 é raiz da equação dada. Aplicando Briot-Ruffini, a equação transforma-se em $(x + 1).(x^2 + mx + 9) = 0$. Basta analisar agora o discriminante do fator quadrático: $\Delta = m^2 - 36$.
I. VERDADEIRA, pois Δ < 0 em tal intervalo, o que produz uma única raiz real, – 1, duas raízes complexas não reais.
II. VERDADEIRA, pois: se m = – 6, então 3 é raiz dupla; se m = 6, então – 3 é raiz com multiplicidade 2.
III. FALSA, bastando escolher m no intervalo]– 6,6[para negar a afirmação.

19) Duas circunferências concêntricas $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ têm raios de **6 cm** e $\mathbf{6\sqrt{2}}$ **cm**, respectivamente. Seja $\overline{\mathbf{AB}}$ uma corda de $\mathbf{C_2}$, tangente à $\mathbf{C_1}$. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{\mathbf{AB}}$ e pelo arco $\overline{\mathbf{AB}}$ mede, em $\mathbf{cm^2}$.
a) 9 (π - 3) b) 18 (π + 3) c) 18 (π - 2) d) 18 (π + 2) e) 16 (π + 3)

Solução IDEAL (Alternativa C)

A área S pedida é a de um segmento circular de raio $6\sqrt{2}$ e ângulo central 90º. Com efeito, sendo O o centro das circunferências e T o ponto em que a corda AB intersecta a circunferência menor, tem-se que o triângulo TAO é retângulo em T, AO = $6\sqrt{2}$ e TO = 6. Logo, o triângulo TAO também é isósceles, e, portanto, o ângulo que define o segmento circular é: AÔB = 2.AÔT, cuja medida é 2.45º = 90º. Desse modo:

$$S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen}\alpha) = \frac{(6\sqrt{2})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 18(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

20) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede ℝ **cm**, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em $\mathbf{cm^3}$, é igual a:
a) πR^3 b) $\pi\sqrt{2}\, R^3$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Re^3$ d) $\pi\sqrt{3}\, R^3$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Re^3$

Solução IDEAL (Alternativa E)

Sejam g e h as medidas da geratriz e da altura do cone, em cm, respectivamente. Então, a seção meridiana do cone tem perímetro igual a 2(g+R). Assim, sendo S_{total} a área total do cone e $S_{círculo}$ a área do círculo descrito, cujo raio será R+g, tem-se que:

$S_{total} = \frac{1}{3}.\ S_{círculo} \Rightarrow \pi R(R + g) = \frac{1}{3}.\pi(R + g)^2 \Leftrightarrow 3R = R + g \Leftrightarrow g = 2R.$

Além disso: $g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 4R^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$. Portanto, o volume do cone é:

$$V_{cone} = \frac{S_{base}.h}{3} = \frac{\pi R^2.R\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21) Seja **A** um conjunto não-vazio.
a) Se **n(A) = m**, calcule ***n(P(A))*** em termos de **m**.
b) Denotando $\boldsymbol{P^1(A) = P(A)}$ e $\boldsymbol{P^{k+1}(A) = P(P^k(A))}$, para todo número natural **k ≥ 1**, determine o menor ***k***, tal que $\boldsymbol{n(P^k(A)) \geq 65000}$, sabendo que **n(A) = 2**.

Solução IDEAL

a) **1ª Solução**
Os subconjuntos de A podem ter 0 elemento (vazio) ou só 1 elemento ou só 2 elementos ou ....ou m elementos (A). A quantidade total de subconjuntos é, portanto, igual a;
$n(P(A)) = C_{m,0} + C_{m,1} + C_{m,2} + ... + C_{m.m} = (1 + 1)^m = 2^m$

2ª Solução

Suponha-se inicialmente m > 0. Para formar um subconjunto qualquer de A devem ser tomadas **m** decisões consecutivas, a fim de determinar se cada elemento de A será ou não elemento de tal subconjunto. Como, para cada decisão, há 2 modos de responder("sim" ou "não"), pelo princípio multiplicativo haverá um total de : $\underbrace{2.2.2......2}_{\text{m fatores}} = 2^m$ subconjuntos.

Caso m = 0, o raciocínio acima não se aplica. No entanto, a fórmula continua válida, uma vez que neste caso A = $\varnothing$

$\underset{\text{item a}}{=} 2^{n(Pk(A))} \underset{\substack{\text{hipótese} \\ \text{de indução}}}{=} 2^{2^{2^{\cdots 2^m}}}$, em que ocorrem k algarismos dois no expoente mais um algarismo 2 na base, totalizando k + 1 algarismos iguais a 2. Logo, a fórmula é válida para todo natural maior que zero.

Assim, a inequação $n(P^k(A)) \geq 65000$ fica (observando que m = 2):

$2^{2^{2^{\cdots 2^2}}} \geq 65000$, em que aparecem k + 1 algarismos iguais a 2 (devido ao fato de m ser igual a 2).

Como $2^{15} < 65000 < 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$, basta impor que k seja, no mínimo, **3**.

22) Uma caixa branca contém **5 bolas verdes** e **3 azuis**, e uma caixa contém **3 bolas verdes** e **2 azuis**. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, **2** dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que **4**, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais caso, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

Solução IDEAL

Seja p_1 a probabilidade de sair a bola verde na urna 1 e p_2 a probabilidade de sair a bola verde na urna 2.
Seja x o valor que aparece no 1º dado e y o valor que aparece no 2º dado.
Como existem 6 valores para x e 6 valores para y, existem 36 maneiras de escrevermos a soma x + y, levando em consideração a ordem dos termos (3 + 4 é diferente de 4 + 3).
Para x + y < 4 temos as seguintes possibilidades: 1 + 1, 1 + 2 e 2 + 1, ou seja, 3 casos.

Portanto, a probabilidade da soma dos números nos dados ser menor que 4 é igual a $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ e sair soma maior que ou igual a 4 probabilidade de $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Desta forma: $p_1 = p_{soma<4} \cdot p_{verde\ urna\ 1} = \frac{1}{12}\frac{5}{8} = \frac{5}{96}$ e $p_2 = p_{soma \geq 4} \cdot p_{verde\ urna\ 2} = \frac{11}{12}\frac{3}{5} = \frac{11}{20}$.

Como a bola verde sai da urna 1 ou da urna 2: $p_{verde} = p_1 + p_2 = \frac{5}{96} + \frac{11}{20} = \frac{289}{480}$

23) Determine os valores reais do parâmetro **a** para os quais existe um número real **x** satisfazendo $\sqrt{\mathbf{1 - x^2}} \geq \mathbf{a - x}$.

Solução IDEAL

Para que exista solução real para a inequação devemos ter $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Assim, existe um arco y ($0 \leq y \leq 2\pi$) de modo que x = sen y. Desta forma: $\sqrt{1-x^2} \geq a - x \Rightarrow \sqrt{1-(\text{sen}y)^2} \geq a - \text{sen}y \Rightarrow$

$\sqrt{\cos^2 y} \geq a - \text{sen}y \Rightarrow a \leq |\cos y| + \text{sen}y \Rightarrow a \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|\cos y| + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right)$.

Se cos y ≥ 0 temos que $a \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right) \Rightarrow a \leq \sqrt{2}.\text{sen}\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$

Se cos y < 0 temos que $a \leq \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right) \Rightarrow a \leq \sqrt{2}.\text{sen}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$

Como – 1 ≤ sen y ≤ 1, então temos, nos dois casos, que $a \leq \sqrt{2}$.

24) Sendo $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{1+i}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} \mathbf{z^n}\right| = \left|\mathbf{z + z^2 + z^3 + ... + z^{60}}\right|$.

Solução IDEAL

Inicialmente notemos que $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Desta forma: $S = |z + z^2 + z^3 + ... + z^{60}| = \left|\frac{z^{61} - z}{z - 1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{61\pi}{4}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{61\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1}\right| \Rightarrow$

$$S = \left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = \frac{\left|-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right|}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

25) Para **b > 1** e **x > 0**, resolva a equação em $\mathbf{x}$: $(\mathbf{2x})^{\log_b 2} - (\mathbf{3x})^{\log_b 3} = \mathbf{0}$.

1ª Solução IDEAL

Aplicando $\log_b$ na expressão temos que: $[\qquad] = [\qquad] \Rightarrow \log_b 2.\log_b 2x = \log_b 3.\log_b 3x \Rightarrow$

$\frac{\log_b 2x}{\log_b 3} = \frac{\log_b 3x}{\log_b 2} \Rightarrow \log_3(2x) = \log_2(3x)$

Seja $\alpha = \log_3(2x)$ e $\beta = \log_2(3x)$. Pela definição de logaritmo: $2x = 3^\alpha$ e $3x = 2^\beta \Rightarrow x = \frac{3^\alpha}{2}$ e $x = \frac{2^\beta}{3} \Rightarrow$

$\frac{3^\alpha}{2} = \frac{2^\beta}{3} \Rightarrow 3^{\alpha+1} = 2^{\beta+1}$ (*)

Entretanto, temos $\alpha = \beta$, fazendo com que a única solução para (*) seja $\alpha = \beta = -1$.

Portanto: $\log_3(2x) = -1 \Rightarrow 2x = 1/3 \Rightarrow x = 1/6$

2ª Solução IDEAL

Aplicando $\log_b$ na expressão temos que: $[\qquad] = [\qquad] \Rightarrow \log_b 2.\log_b 2x = \log_b 3.\log_b 3x \Rightarrow$

$\log_b 2(\log_b 2 + \log_b x) = \log_b 3(\log_b 3 + \log_b x) \Rightarrow (\log_b 2)^2 + \log_b 2.\log_b x = (\log_b 3)^2 + \log_b 3.\log_b x \Rightarrow$

$(\log_b x)(\log_b 3 - \log_b 2) = (\log_b 2 - \log_b 3)(\log_b 2 + \log_b 3) \Rightarrow \log_b x = -(\log_b 2 + \log_b 3) \Rightarrow \log_b x = -\log_b 6 \Rightarrow$

$\log_b x = \log_b(1/6) \Rightarrow x = 1/6$

26) Considere a equação $\mathbf{x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0}$, em que **d** é uma constante real. Para qual valor de **d** a equação admite uma raiz dupla no intervalo **] 0, 1[**?

1ª Solução IDEAL

Suponhamos que as raízes de $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$ sejam a, a e b. Pelas Relações de Girard temos que:

$2a + b = -3$ (1) $\quad 2ab + a^2 = -2$ (2) $\quad a^2b = -d$ (3)

Substituindo (1) em (2): $2a(-3 - 2a) + a^2 = -2 \Rightarrow -6a - 4a^2 + a^2 = -2 \Rightarrow 3a^2 + 6a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$

Como $a \in]0, 1[$ então a única solução possível é $a = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$. Assim, $b = -3 - 2a = -1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Deste modo: $d = -a^2b = -\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2\left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \left(1 - \frac{2\sqrt{15}}{3} + \frac{5}{3}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \left(\frac{8 - 2\sqrt{15}}{3}\right)\left(\frac{3 + 2\sqrt{15}}{3}\right) \Rightarrow$

$d = \frac{24 + 16\sqrt{15} - 6\sqrt{15} - 60}{9} \Rightarrow d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$

2ª Solução IDEAL

Se uma equação polinomial possui uma raiz dupla, então esta também é raiz de sua derivada. Assim:

$P'(x) = 3x^2 + 6x - 2 \Rightarrow x = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$. Como $x \in]0, 1[$ então a única raiz possível é $x = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$.

Aplicando este valor na equação: $\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 + 3\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 - 2\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + d = 0 \Rightarrow$

$\frac{5\sqrt{15}}{9} - 5 + \sqrt{15} - 1 + 3 - 2\sqrt{15} + 5 + 2 - \frac{2\sqrt{15}}{3} + d = 0 \Rightarrow d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$

27) Prove que, se os ângulos internos α, β ou γ de um triângulo satisfazem a equação **sen (3α) + sen (3β) + sen (3γ) =** 0, então, pelo menos, um dos três ângulos internos α, β ou γ é igual a **60°**.

Solução IDEAL

$\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) = 2\text{sen}[3(\alpha + \beta)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= 2\text{sen}[3(180^o - \gamma)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) = 2\text{sen}[270^o - 3\gamma/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= -2\cos(3\gamma/2)\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) = 2\cos(3\gamma/2)[\text{sen}(3\gamma/2) - \cos[(3\alpha - 3\beta)/2] =$

$= 2\cos(3\gamma/2)[\cos(90^o - 3\gamma/2) - \cos[(3\alpha - 3\beta)/2] = -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}[(180^o + 3\alpha - 3\beta - 3\gamma)/4]\text{sen}[(180^o - 3\alpha + 3\beta - 3\gamma)/4] =$

$= -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}[(180^o + 3\alpha - 540^o + 3\alpha)/4]\text{sen}[(180^o + 3\beta + 3\beta - 540^o)/4] =$

$= -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}(3\alpha/2 - 90^o)\text{sen}(3\beta/2 - 90^o) = -4\cos(3\gamma/2)\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2) = 0$

Assim, pelo menos um dos valores de $\cos(3\alpha/2)$, $\cos(3\beta/2)$, $\cos(3\gamma/2)$ deve ser igual a zero.
Perceba que $\cos(3x/2) = 0 \Rightarrow 3x/2 = 90^o + (180^o)k \Rightarrow x = 60^o + (120^o)k,\ k \in Z$
Se x for ângulo de um triângulo (no caso, x pode ser igual a α, β ou γ), a única solução possível é $x = 60^o$.
Portanto, pelos menos um dos ângulos α, β e γ deve ser igual a 60^o.

28) Se **A** é uma matriz real, considere as definições:
I – Uma matriz quadrada **A** é ortogonal se e só se **A** for inversível e $\mathbf{A^{-1} = A^T}$.
II – Uma matriz quadrada **A** é diagonal se e só $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para todo **i, j = 1, ... n**, com $\mathbf{i \neq j}$.
Determine as matrizes quadradas de ordem **3** que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

Solução IDEAL

Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ e como A é ortogonal e diagonal então: $A^{-1} = A^t = A$.

Portanto: $A.A^{-1} = I \Rightarrow A.A = I \Rightarrow A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a^2 = 1 \quad b^2 = 1 \quad c^2 = 1$

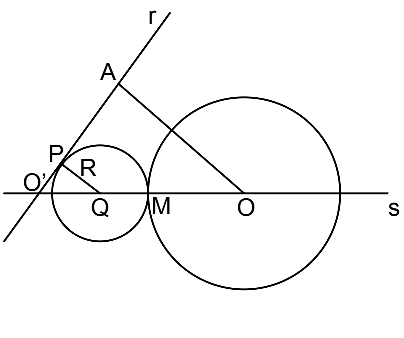
As matrizes procuradas são:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29) Sejam **r** e **s** duas retas que se interceptam segundo um ângulo de **60°**. Seja $\mathbf{C_1}$ uma circunferência de **3 cm** de raio, cujo centro **O** se situa em **s**, a **5 cm** de **r**. Determine o raio da menor circunferência tangente à $\mathbf{C_1}$ e à reta **r**, cujo centro também se situa na reta **s**.

Solução IDEAL



Como AO = 5 cm e $\angle AO'O = 60^o \Rightarrow OO' = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Em ΔPQO' temos PQ = R e $O'Q = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Portanto: OO' = O'Q + QM + MO $\Rightarrow \dfrac{10\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3} + R + 3 \Rightarrow$

$\dfrac{R(2\sqrt{3}+3)}{3} = \dfrac{10\sqrt{3}-9}{3} \Rightarrow R = \dfrac{10\sqrt{3}-9}{2\sqrt{3}+3} \Rightarrow R = 29 - 16\sqrt{3}$ cm

30) Sejam os pontos **A : (2,0), B : (4,0)** e **P : (3,5 + 2** $\mathbf{\sqrt{2}}$ **)**.
a) Determine a equação da circunferência **C**, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos **A** e **B** e é tangente ao eixo **y**.
b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência **C** que passam pelo ponto **P**.

Solução IDEAL

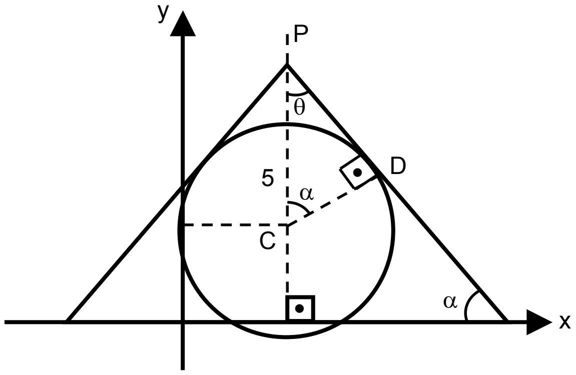
a) Supondo que D (a; b) é o centro da circunferência e R é o raio desta circunferência, então: a > 0, b > 0, pois D esta no 1º quadrante e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ é a equação reduzida da circunferência.

Como A (2; 0) e B (4; 0) pertencem à circunferência, então: $(2 - a)^2 + (-b)^2 = R^2$ (I)
$(4 - a)^2 + (-b)^2 = R^2$ (II)

Fazendo (II) - (I), obtém-se: $12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$

Note que $R = a = 3$, logo $b = 2\sqrt{2}$, sendo assim, a equação procurada e $(x - 3)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 9$

b)



De acordo com a figura acima percebemos, que $\text{tg}\alpha = \frac{PD}{CD} = \frac{4}{3}$.

Sendo **t** a reta tangente a circunferência que passa pelo ponto **P**, cuja equação é t: $y = mx + h$, onde **m** é o coeficiente angular e **h** é coeficiente linear. Perceba que $m = -\frac{4}{3}$ logo $t : y = -\frac{4x}{3} + h$, substituindo P, teremos: $5 + 2\sqrt{2} = -4 + h \Rightarrow h = 9 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$ $t : y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$, porém, m também pode ser $\frac{4}{3}$, neste caso a equação de t é $y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$.

Solução Ideal – ITA 2004 – Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

Manoel Leite Carneiro – Marcelo Rufino – Márcio Pinheiro
Jefferson França – Alexandre Sampaio