

1) Sejam os conjuntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$ ,  $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$  e  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$ .  
Demonstre que  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$ .

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Seja  $x \in S_1 \cap S_2$ . Então:

(1)  $x \in S_1$

(2)  $x \in S_2$

(3)  $x \in P_1 \cup P_2$ , pois  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$ , por hipótese. Logo  $x \in P_1$  ou  $x \in P_2$ , por hipótese.

Logo  $x \in P_1$  ou  $x \in P_2$ , por (3). Podem ocorrer dois casos:

a)  $x \in P_1$ . Nesta situação, por (2), tem-se que  $x \in P_1 \cap S_2$ . Assim, por hipótese,  $x \in P_2$ , visto que  $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ . Então  $x \in P_1 \cap P_2$ ,

b)  $x \in P_2$ . Aqui, conclui-se que  $x \in P_2 \cap S_1$ , por (1). Como  $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$ , por hipótese, deve-se impor que  $x \in P_1$ . Portanto, novamente  $x \in P_1 \cap P_2$ .

Desta forma, em qualquer caso, tem-se que  $x \in S_1 \cap S_2$  implica  $x \in P_1 \cap P_2$ , isto é,  $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$ .

2) Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Considere que a, b e c são os resultados que saem em cada dado. Inicialmente deve-se enumerar os casos em que  $a + b = c$  para depois calcular as devidas permutações de modo que os casos em que  $a + c = b$  e  $b + c = a$  também sejam calculados.

i) soma = 2:

$(1, 1, 2) \rightarrow 3!/2! = 3$  possibilidades

ii) soma 3:

$(1, 2, 3) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

iii) soma 4:

$(1, 3, 4) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

$(2, 2, 4) \rightarrow 3!/2! = 3$  possibilidades

iv) soma 5:

$(1, 4, 5) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

$(2, 3, 5) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

v) soma 6:

$(1, 5, 6) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

$(2, 4, 6) \rightarrow 3! = 6$  possibilidades

$(3, 3, 6) \rightarrow 3!/2! = 3$  possibilidades

Logo, a probabilidade pedida vale  $p = \frac{3+6+6+3+6+6+6+6+3}{6 \times 6 \times 6} \Rightarrow p = \frac{5}{24}$

3) Considere as hipérbolas que passam pelos pontos  $(-4, 2)$  e  $(-1, -1)$  e apresentam diretriz na reta  $y = -4$ . Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérbolas, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Para que um ponto P pertença à hipérbole H, a razão entre as distâncias de P ao foco, F, e à diretriz correspondente, d, deve ser igual à excentricidade, e, de H. Por sua vez, deve-se impor  $e > 1$ , a fim de que a cônica seja uma hipérbole, de fato: Assim, sendo  $F(x, y)$ ,  $A(-4, 2)$ ,  $B(-1, -1)$  e  $d: y = -4$ ,

Deve-se cumprir:

$$e = \frac{FA}{Ad} = \frac{FB}{Bd} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{6} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{3} \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 8 \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \end{cases}$$

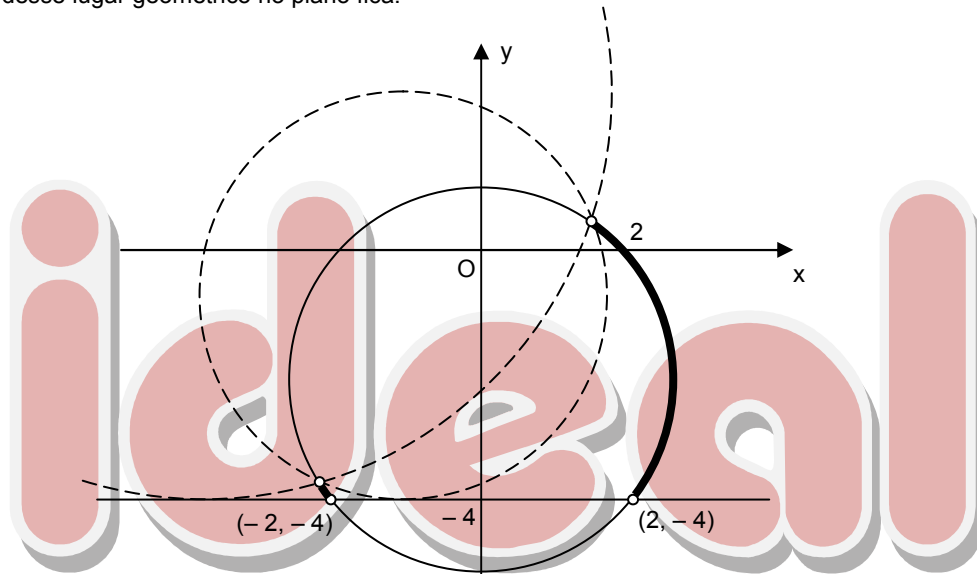
Adicionalmente, como os pontos A, B e F devem estar num mesmo semiplano em relação à d, pode-se concluir que o lugar geométrico é descrito por:

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 8 \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \\ y > -4 \end{cases}$$

Sendo:  $C_1: x^2 + (y+2)^2 = 8$        $C_2: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 36$        $C_3: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$ ,

Tem-se que:  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \left\{ \left( \frac{-1+3\sqrt{7}}{4}, \frac{-7+3\sqrt{7}}{4} \right), \left( \frac{-1-3\sqrt{7}}{4}, \frac{-7-3\sqrt{7}}{4} \right) \right\}$ .

A representação desse lugar geométrico no plano fica:

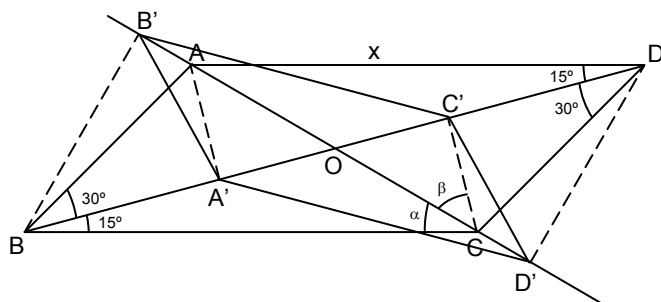


**Obs:** Perceba que é um erro incluir no lugar geométrico os pontos da circunferência  $x^2 + (y+2)^2 = 8$  que estão abaixo da reta  $y = -4$ , uma vez que o foco e os pontos da hipérbole devem estar sempre no mesmo semiplano definido pela diretriz. Por exemplo, tome o ponto  $F(0, 2\sqrt{2}-2)$ , que é a interseção de  $x^2 + (y+2)^2 = 8$ , para  $y > -4$ , com o eixo y. Assim, a excentricidade da hipérbole seria dada por  $e = \frac{\sqrt{x^2 + (y-2\sqrt{2}+2)^2}}{4+y}$ , onde  $(x, y)$  são dois pontos quaisquer da hipérbole.

Aplicando os pontos  $(-4, 2)$  e  $(-1, -1)$  nesta equação encontra-se um mesmo valor de excentricidade, aproximadamente igual a 0,6946, ou seja, não representa a excentricidade de uma hipérbole, pois seu valor deveria ser maior que 1.

**4)** Seja  $x$  o valor do maior lado de um paralelogramo ABCD. A diagonal AC divide  $\hat{A}$  em dois ângulos. Iguais a  $30^\circ$  e  $15^\circ$ . A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não contém forma o quadrilátero A'B'C'D'. Calcule o perímetro de A'B'C'D'.

**SOLUÇÃO IDEAL:**



Lei dos senos em  $\triangle ABD$ :  $\frac{x}{\text{sen}30^\circ} = \frac{AB}{\text{sen}15^\circ} \Rightarrow AB = 2x \cdot \text{sen} 15^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{2}$

Lei dos cossenos em  $\triangle ABC$ :  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$

$$AC^2 = \frac{(3 - 2\sqrt{3} + 1)x^2}{2} + x^2 - 2 \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)x}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC^2 = x^2(2 - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1) = x^2(4 - 2\sqrt{3}) = x^2(\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow$$

$$AC = (\sqrt{3} - 1)x$$

Lei dos senos em  $\triangle ABC$ :  $\frac{AB}{\text{sen}\alpha} = \frac{AC}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)x}{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{(\sqrt{3} - 1)x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \text{sen}\alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Em  $\triangle ACC'$  tem-se que  $\alpha + \beta = 75^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ$

Em  $\triangle DCC'$ :  $CC' = CD \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)x}{4}$

Como  $CD'DC'$  é um quadrilátero inscrito, tem-se que  $\angle C'CD = \angle C'D'D = 60^\circ$

Do mesmo modo,  $ADD'A'$  é inscrito, fazendo com que  $\angle AD'A' = \angle ADA' = 15^\circ \Rightarrow \angle AD'C' = 30^\circ$

Lei dos senos em  $\triangle CC'D'$ :  $\frac{CC'}{\text{sen}30^\circ} = \frac{C'D'}{\text{sen}135^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)x}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{C'D'}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow C'D' = \frac{(\sqrt{3} - 1)x}{2}$

Lei dos senos em  $\triangle B'C'D'$ :  $\frac{B'C'}{\text{sen}30^\circ} = \frac{C'D'}{\text{sen}15^\circ} \Rightarrow \frac{B'C'}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{(\sqrt{3} - 1)x}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}} \Rightarrow B'C' = \frac{\sqrt{2}x}{2}$

Portanto, o perímetro de  $A'B'C'D'$  vale:  $2p = 2(C'D' + B'C') = (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)x$

5) A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular  $SABCD$  é duas vezes maior do que a área de sua base  $ABCD$ . Nas faces  $SAD$  e  $SDC$  traçam-se as medianas  $AQ$  e  $DP$ . Calcule o ângulo entre estas medianas.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Sejam  $\ell$  a medida da aresta da base e  $a$  a medida do apótema da pirâmide. Então:  $4 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = 2 \cdot \ell^2 \Leftrightarrow a = \ell$

Assim, cada aresta lateral mede  $x$ , em que:  $x^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$

Dessa forma, cada uma das medianas das faces laterais  $\overline{AQ}$  e  $\overline{DP}$  mede  $y$ , tal que:

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot \left(\ell^2 + \frac{5\ell^2}{4}\right) - \frac{5\ell^2}{4}} \Rightarrow y = \frac{\ell\sqrt{13}}{4}$$

Como as retas  $\overline{AQ}$  e  $\overline{DP}$  são reversas, para obter o ângulo entre elas pode-se traçar a paralela à  $\overline{AQ}$  por  $P$ , que intersecta  $\overline{AB}$  no ponto médio,  $M$ , uma vez que  $Q$  e  $P$  são os respectivos pontos médios de  $\overline{DS}$  e  $\overline{CS}$ .

Finalmente, o ângulo procurado, de medida  $\theta$ , é o ângulo  $\overline{DPM}$ , que pode ser encontrado pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo  $DPM$ :

$$DM^2 = 2 \cdot DP^2 \cdot (1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \left(\frac{\ell\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{13}}{4}\right)^2 \cdot (1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{3}{13}, \text{ uma vez que } 0 < \theta < \pi$$

6) Demonstre que a matriz  $\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ , onde  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , ser escrita como o quadrado de uma matriz

simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

OBS: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

$$\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & a & b \\ a & n & c \\ b & c & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m & a & b \\ a & n & c \\ b & c & p \end{pmatrix}$$

Como o traço deve ser igual a zero:  $m + n + p = 0$

Uma vez que  $m, n$  e  $p$  são naturais, a única possibilidade de resposta para a equação acima é  $m = n = p = 0$ .

Assim, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, conclui-se que:

- i)  $y^2 + z^2 = a^2 + b^2$  e  $yz = ab \Rightarrow y^2 + 2yz + z^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow y + z = a + b$
- ii)  $x^2 + z^2 = a^2 + c^2$  e  $xz = ac \Rightarrow x + z = a + c$
- iii)  $x^2 + y^2 = b^2 + c^2$  e  $xy = bc \Rightarrow x + y = b + c$

Resolvendo o sistema para a, b e c encontra-se como solução  $a = z$ ,  $b = y$  e  $c = x$

Portanto, a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$  satisfaz o enunciado.

7) Considere o conjunto de números complexos  $E = \{a + b\omega\}$ , onde a e b são inteiros e  $\omega = \text{cis}(2\pi/3)$ . Seja o subconjunto  $U = \{\alpha \in E / \exists \beta \in E \text{ no qual } \alpha \beta = 1\}$ . Determine.

a) Os elementos do conjunto U.

b) Dois elementos pertencentes ao conjunto  $Y = E - U$  tais que o produto seja um número primo.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

a) Seja  $E = \{a + b\omega\} = \left\{ a - \frac{b}{2} + i \frac{b\sqrt{3}}{2} \right\}$  com  $\omega = \text{cis} \frac{2\pi}{3}$

Considere-se  $\rho_z$  o módulo do complexo z.

Sejam  $\alpha \in E$  e  $\beta \in E$  com  $\alpha\beta = 1$ . Então  $\rho_{\alpha}\rho_{\beta} = 1 \Rightarrow \rho_{\alpha} = \frac{1}{\rho_{\beta}}$  (1)

Para  $\alpha = a + b\omega$  temos  $\rho_{\alpha} = \sqrt{a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$  com  $\rho_{\alpha} \notin [0; 1[$ , ou seja,  $\rho_{\alpha} \geq 1$  (2), pois  $a, b \in \mathbb{Z}$

Assim, de (1) e (2), temos  $0 < \rho_{\beta} \leq 1$

Analogamente, temos para  $\beta \in E$ ,  $\rho_{\beta} \geq 1$ . Logo  $\rho_{\alpha} = \rho_{\beta} = 1$

Dessa forma, temos:  $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 + ab$

Como  $a^2 + b^2 \geq 0$  então  $1 + ab \geq 0 \Rightarrow ab > -1 \Leftrightarrow ab \geq 0$

De  $a^2 - 2ab + b^2 = 1 - ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 1 - ab$

Conclui-se que  $ab \leq 1$ , ou seja,  $0 \leq ab \leq 1$

Assim, para  $ab = 1$  temos  $a = b \Rightarrow a = b = 1$

$$a = b = -1$$

Para  $ab = 0$ , temos:  $|a - b| = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0$

$$a = -1, b = 0$$

$$a = -1, b = 0$$

$$a = 0, b = 1$$

$$a = 0, b = -1$$

logo, os elementos de U são:

$$U = \left\{ 1; -1; \text{cis} \frac{2\pi}{3}; -\text{cis} \frac{2\pi}{3}; 1 + \text{cis} \frac{2\pi}{3}; -1 - \text{cis} \frac{2\pi}{3} \right\}$$

b) sejam os elementos  $6 + \text{cis} \frac{2\pi}{3}$  e  $5 - \text{cis} \frac{2\pi}{3}$ , por exemplo, ambos pertencentes ao conjunto  $E - U = Y$ , temos:

$$\left( 6 + \text{cis} \frac{2\pi}{3} \right) \left( 5 - \text{cis} \frac{2\pi}{3} \right) = 30 - \text{cis} \frac{2\pi}{3} - \left( \text{cis} \frac{2\pi}{3} \right)^2 = 30 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{31}, \text{ que é primo.}$$

8) Seja a equação  $p^n + 144 = q^2$ , onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

$$p^n = q^2 - 12^2 \Rightarrow p^n = (q - 12)(q + 12)$$

Uma vez que  $p$  é primo, deve-se ter:

$$\begin{cases} q - 12 = p^a \\ q + 12 = p^{n-a} \end{cases}, \text{ onde } n - a > a \text{ pois } q + 12 > q - 12$$

Subtraindo as duas equações:

$$p^{n-a} - p^a = 24 \Rightarrow p^a(p^{n-2a} - 1) = 2^3 \cdot 3$$

Se  $a \neq 0$ , sendo  $p$  um número primo há apenas quatro possibilidades:

i)  $p = 2$  e  $a = 1 \Rightarrow 2^{n-2} - 1 = 12 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

ii)  $p = 2$  e  $a = 2 \Rightarrow 2^{n-4} - 1 = 6 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

iii)  $p = 2$  e  $a = 3 \Rightarrow 2^{n-6} - 1 = 3 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow q = 20$

iv)  $p = 3$  e  $a = 1 \Rightarrow 3^{n-2} - 1 = 2^3 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow q = 15$

Se  $a = 0$ :  $q - 12 = 1 \Rightarrow q = 13 \Rightarrow p^n = 25 \Rightarrow p = 5$  e  $n = 2$

Logo, os possíveis valores de  $(n, p, q)$  são  $(8, 2, 20)$  ou  $(4, 3, 15)$  ou  $(2, 5, 13)$

9) Seja o sistema  $\begin{cases} \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y) \operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z) \operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases}$ , onde  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ . Determine as condições que  $a, b$  e  $c$  devem satisfazer

para que o sistema admita pelo menos uma solução.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Desenvolvendo as três equações obtém-se:

$$\operatorname{tg}x \frac{\operatorname{tg}y - \operatorname{tg}z}{1 + \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z} = a \Rightarrow \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z - a \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = a$$

$$\operatorname{tg}y \frac{\operatorname{tg}z - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}z \operatorname{tg}x} = b \Rightarrow -\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y - b \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z + \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = b$$

$$\operatorname{tg}z \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y} = c \Rightarrow -c \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z - \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = c$$

Fazendo  $m = \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y$ ,  $n = \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z$  e  $p = \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z$  obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} m - n - ap = a \\ -m - b \cdot n + p = b \\ -c \cdot m + n - p = c \end{cases}$$

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} m - n - ap = a \\ -(b+1)n + (1-a)p = a + b \\ -c \cdot m + (1-c)n - (1+ac)p = ac + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - n - ap = a \\ -(b+1)n + (1-a)p = a + b \\ (1-c)n - (1+ac)p = ac + c \end{cases} \Rightarrow$$

$$p[(1-a)(1-c) - (1+ac)(b+1)] = (a+b)(1-c) + (ac+c)(b+1) \Rightarrow p[-abc - a - b - c] = abc + a + b + c \quad (\text{eq. 1})$$

Se  $abc + a + b + c \neq 0$  tem-se que  $p = -1$ . Analogamente, se  $abc + a + b + c \neq 0$  tem-se  $m = -1$  e  $n = -1$ .

Logo:  $\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = -1$ ,  $\operatorname{tg}x \operatorname{tg}z = -1$  e  $\operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = -1$

Multiplicando estas equações obtém-se  $(\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z)^2 = -1$ , ou seja, não existem valores reais de  $x, y$  e  $z$  que satisfaçam o problema.

Por outro lado, se  $abc + a + b + c = 0$ , então  $p$  pode assumir qualquer valor real. Como a equação 1 é simétrica em relação aos números  $a, b$  e  $c$ , o mesmo vale para  $m$  e  $n$ .

Assim, é possível escolher convenientemente os valores de  $\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = k_1$ ,  $\operatorname{tg}x \operatorname{tg}z = k_2$  e  $\operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = k_3$  de modo que:

$$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z = \pm \sqrt{k_1 k_2 k_3} \Rightarrow \operatorname{tg}x = \pm \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3}}, \operatorname{tg}y = \pm \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2}} \text{ e } \operatorname{tg}z = \pm \sqrt{\frac{k_2 k_3}{k_1}}, \text{ fazendo com que o sistema possua pelo}$$

menos uma solução para  $x, y$  e  $z$ .

Portanto, a condição para que o sistema possua solução é  $abc + a + b + c = 0$ .

10) Considere a sequência  $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}$ ,  $a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}$ , .....

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

**SOLUÇÃO IDEAL:**

Inicialmente note que  $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A lei de formação dada na questão é equivalente a  $a_k = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_{k-1}}{2}} \Rightarrow 2 \cdot a_k^2 = 1 + a_{k-1}$

Comparando com a identidade trigonométrica  $2 \cdot \cos^2 \alpha / 2 = 1 + \cos \alpha$ , pode-se então afirmar que existe um ângulo  $\alpha$  tal que  $a_k = \cos \alpha / 2$  e  $a_{k-1} = \cos \alpha$

Como  $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  então  $a_1 = \cos \frac{\pi}{6}$ ,  $a_2 = \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6}$ ,  $a_3 = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 6}$ , ...,  $a_{20} = \cos \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}$

Logo:  $P_{20} = \cos \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{18} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{17} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

Multiplicando e dividindo por  $2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}$ :

$$P_{20} = \frac{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{18} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{17} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\text{sen} \frac{\pi}{2^{18} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{18} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{17} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\frac{1}{2} \text{sen} 30^\circ \cdot \cos \frac{\pi}{2^{17} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\frac{1}{2^2} \text{sen} \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{16} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\frac{1}{2^3} \text{sen} \frac{\pi}{2^{15} \cdot 6} \dots \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\text{sen} \frac{\pi}{3}}{2^{20} \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{19} \cdot 6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2^{21} \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2^{20} \cdot 6}}$$

**ideal**

**MILITAR**

**Solução Ideal - IME 2010 - Matemática**

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

**Equipe de Matemática**

Prof. Marcelo Rufino  
Prof. Márcio Pinheiro  
Prof. Adenilson  
Prof. Manoel Leite

**Coordenação**

Marcelo Rufino

**Digitação**

Cynthia Siqueira

Mais informações em [www.grupoideal.com.br/idealmilitar/idealmilitar.html](http://www.grupoideal.com.br/idealmilitar/idealmilitar.html)  
Tel: 3323 5051