1) Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$.
Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$.

SOLUÇÃO IDEAL:
Seja $x \in S_1 \cap S_2$. Então:
(1) $x \in S_1$
(2) $x \in S_2$
(3) $x \in P_1 \cup P_2$, pois $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$, por hipótese. Logo x e P_1 ou $x \in P_2$, por hipótese.
Logo $x \in P_1$ ou $x \in P_2$, por (3). Podem ocorrer dois casos:
a) $x \in P_1$. Nesta situação, por (2), tem-se que $x \in P_1 \cap S_2$. Assim, por hipótese, $x \in P_2$, visto que $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$. Então $x \in P_1 \cap P_2$,
b) $x \in P_2$. Aqui, conclui-se que $x \in P_2 \cap S_1$, por (1). Como $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, por hipótese, deve-se impor que $x \in P_1$. Portanto, novamente $x \in P_1 \cap P_2$.
Desta forma, em qualquer caso, tem-se que $x \in S_1 \cap S_2$ implica $x \in P_1 \cap P_2$, isto é, $\boxed{(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2).}$

2) Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente.Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

SOLUÇÃO IDEAL:

Considere que a, b e c são os resultados que saem em cada dado. Inicialmente deve-se enumerar os casos em que a + b = c para depois calcular as devidas permutações de modo que os casos em que a + c = b e b + c = a também sejam calculados.

i) soma = 2:
(1, 1, 2) $\rightarrow$ 3!/2! = 3 possibilidades
ii) soma 3:
(1, 2, 3) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
iii) soma 4:
(1, 3, 4) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
(2, 2, 4) $\rightarrow$ 3!/2! = 3 possibilidades
iv) soma 5:
(1, 4, 5) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
(2, 3, 5) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
v) soma 6:
(1, 5, 6) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
(2, 4, 6) $\rightarrow$ 3! = 6 possibilidades
(3, 3, 6) $\rightarrow$ 3!/2! = 3 possibilidades

Logo, a probabilidade pedida vale $p = \dfrac{3+6+6+3+6+6+6+6+3}{6 \times 6 \times 6} \Rightarrow \boxed{p = \dfrac{5}{24}}$

3) Considere as hipérboles que passam pelos pontos (- 4,2) e (-1,-1) e apresentam diretriz na reta y = - 4. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

SOLUÇÃO IDEAL:

Para que um ponto P pertença à hipérbole H, a razão entre as distâncias de P ao foco, F, e à diretriz correspondente, d, deve ser igual à excentricidade, e, de H. Por sua vez, deve-se impor e > 1, a fim de que a cônica seja uma hipérbole, de fato: Assim, sendo F(x,y), A(-4,2), B(-1,-1) e d: y = -4,
Deve-se cumprir:

$$e = \frac{FA}{Ad} = \frac{FB}{Bd} > 1 \Leftrightarrow . \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}{6} = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{3} \\ (x+4)^2+(y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2 = 8 \\ (x+4)^2+(y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 > 9 \end{cases}$$

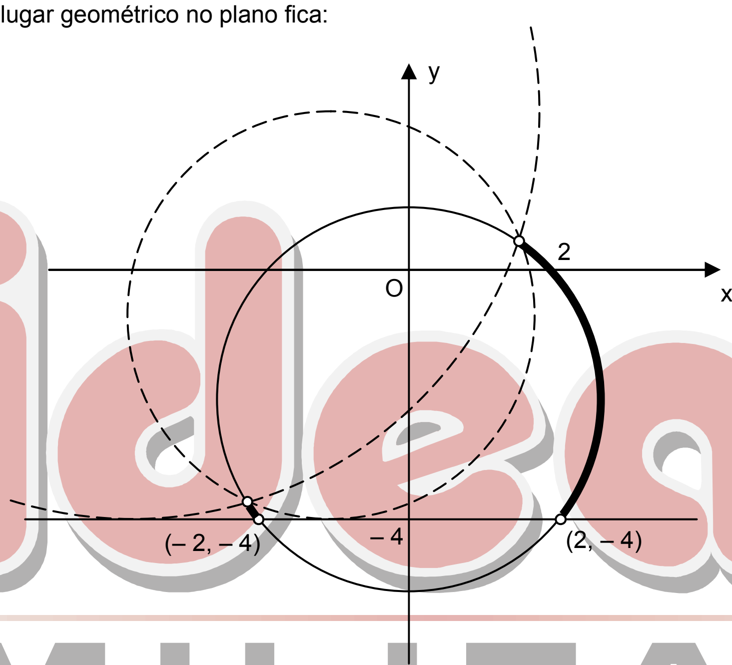
Adicionalmente, como os pontos A, B e F devem estar num mesmo semiplano em relação à d, pode-se concluir que o lugar geométrico é descrito por:

$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2=8 \\ (x+4)^2+(y-2)^2>36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2>9 \\ y>-4 \end{cases}$$

Sendo: C_1: $x^2 + (y + 2)^2 = 8$ C_2: $(x + 4)^2 + (y – 2)^2 = 36$ C_3: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$,

Tem-se que: $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \left\{\left(\frac{-1+3\sqrt{7}}{4},\frac{-7+3\sqrt{7}}{4}\right),\left(\frac{-1-3\sqrt{7}}{4};\frac{-7-3\sqrt{7}}{4}\right)\right\}$.

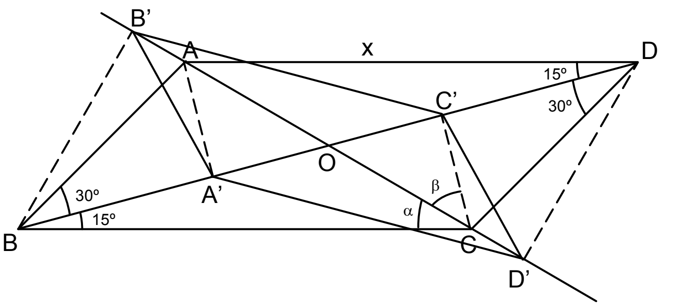
A representação desse lugar geométrico no plano fica:



Obs: Perceba que é um erro incluir no lugar geométrico os pontos da circunferência $x^2 + (y + 2)^2 = 8$ que estão abaixo da reta y = – 4, uma vez que o foco e os pontos da hipérbole devem estar sempre no mesmo semiplano definido pela diretriz. Por exemplo, tome o ponto $F(0,2\sqrt{2}-2)$, que é a interseção de $x^2 + (y + 2)^2 = 8$, para y > – 4, com o eixo y. Assim, a excentricidade da hipérbole seria dada por $e=\frac{\sqrt{x^2+(y-2\sqrt{2}+2)^2}}{4+y}$, onde (x, y) são dois pontos quaisquer da hipérbole. Aplicando os pontos (- 4, 2) e (-1, -1) nesta equação encontra-se um mesmo valor de excentricidade, aproximadamente igual a 0,6946, ou seja, não representa a excentricidade de uma hipérbole, pois seu valor deveria ser maior que 1.

4) Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo ABCD. A diagonal AC divide Â em dois ângulos. Iguais a 30º e 15º. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não contém forma o quadrilátero A'B'C'D'.Calcule o perímetro de A'B'C'D'.

SOLUÇÃO IDEAL:



Lei dos senos em ΔABD: $\frac{x}{sen30º}=\frac{AB}{sen15º}$ $\Rightarrow$ AB = 2x.sen 15º $\Rightarrow$ $AB=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{2}$

Lei dos cossenos em ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 – 2.AB.BC.\cos 45º$ $\Rightarrow$

$AC^2 = \frac{(3-2\sqrt{3}+1)x^2}{2} + x^2 - 2\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{2}x\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC^2 = x^2\left(2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1\right) = x^2(4-2\sqrt{3}) = x^2(\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow$
$AC = \left(\sqrt{3}-1\right)x$

Lei dos senos em ΔABC: $\frac{AB}{sen\alpha} = \frac{AC}{sen45^o} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{2}}{sen\alpha} = \frac{(\sqrt{3}-1)x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow sen\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30^o$

Em ΔACC' tem-se que $\alpha + \beta = 75^o \Rightarrow \beta = 45^o$

Em ΔDCC': CC' = CD.cos 60º $\Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{4}$

Como CD'DC' é um quadrilátero inscritível, tem-se que ∠C'CD = ∠C'D'D = 60º
Do mesmo modo, ADD'A' é inscritível, fazendo com que ∠AD'A' = ∠ADA' = 15º ⇒ ∠AD'C' = 30º

Lei dos senos em ΔCC'D': $\frac{CC'}{sen30^o} = \frac{C'D'}{sen135^o} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{C'D'}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow C'D' = \frac{(\sqrt{3}-1)x}{2}$

Lei dos senos em ΔB'C'D': $\frac{B'C'}{sen30^o} = \frac{C'D'}{sen15^o} \Rightarrow \frac{B'C'}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{(\sqrt{3}-1)x}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} \Rightarrow B'C' = \frac{\sqrt{2}x}{2}$

Portanto, o perímetro de A'B'C'D' vale: 2p = 2(C'D' + B'C') = $\boxed{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)x}$

5) A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD.Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP.Calcule o ângulo entre estas medianas.

SOLUÇÃO IDEAL:

Sejam ℓ a medida da aresta da base e **a** a medida do apótema da pirâmide. Então: $4.\frac{\ell.a}{2} = 2.\ell^2 \Leftrightarrow a = \ell$

Assim, cada aresta lateral mede x, em que: $x^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$

Dessa forma, cada uma das medianas das faces laterais $\overline{AQ}$ e $\overline{DP}$ mede y, tal que:

$y = \frac{1}{2}\sqrt{2.\left(\ell^2 + \frac{5\ell^2}{4}\right) - \frac{5\ell^2}{4}} \Rightarrow y = \frac{\ell\sqrt{13}}{4}$

Como as retas $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{DP}$ são reversas, para obter o ângulo entre elas pode-se traçar a paralela à $\overleftrightarrow{AQ}$ por P, que intersecta $\overline{AB}$. no ponto médio, M ,uma vez que Q e P são os respectivos pontos médios de $\overline{DS}$ e $\overline{CS}$.

Finalmente, o ângulo procurado, de medida θ, é o ângulo $D\hat{P}M$, que pode ser encontrado pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo DPM:

$DM^2 = 2.DP^2.(1 - \cos\theta) \Leftrightarrow \left(\frac{\ell\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2.\left(\frac{\ell\sqrt{13}}{4}\right)^2.(1-\cos\theta) \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \arccos\frac{3}{13}}$, uma vez que $0 < \theta < \pi$

6) Demonstre que a matriz $\begin{bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$, onde x, y, z ∈ IN, ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
OBS: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

SOLUÇÃO IDEAL:

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & a & b \\ a & n & c \\ b & c & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m & a & b \\ a & n & c \\ b & c & p \end{pmatrix}$$

Como o traço deve ser igual a zero: m + n + p = 0
Uma vez que m, n e p são naturais, a única possibilidade de resposta para a equação acima é m = n = p = 0.
Assim, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, conclui-se que:

i) $y^2 + z^2 = a^2 + b^2$ e $yz = ab$ $\Rightarrow$ $y^2 + 2yz + z^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\Rightarrow$ $y + z = a + b$

ii) $x^2 + z^2 = a^2 + c^2$ e $xz = ac$ $\Rightarrow$ $x + z = a + c$

iii) $x^2 + y^2 = b^2 + c^2$ e $xy = bc$ $\Rightarrow$ $x + y = b + c$

Resolvendo o sistema para a, b e c encontra-se como solução a = z, b = y e c = x

Portanto, a matriz $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}}$ satisfaz o enunciado.

7) Considere o conjunto de números complexos E = {a+bϖ}, onde a e b são inteiros e ϖ = cis ($2\pi/3$). Seja o subconjunto U = { $\alpha \in$ E / $\exists\beta \in$ E no qual $\alpha\,\beta = 1$}. Determine.

a) Os elementos do conjunto U.

b) Dois elementos pertencentes ao conjunto Y = E – U tais que o produto seja um número primo.

SOLUÇÃO IDEAL:

a) Seja E = {a + b w} = $\left\{a-\frac{b}{2}+;\frac{b\sqrt{3}}{2}\right\}$ com w = cis $\frac{2\pi}{3}$

Considere-se ρ_z o módulo do complexo z.

Sejam $\alpha \in$ E e $\beta \in$ E com $\alpha.\beta = 1$. Então $\rho_\alpha.\rho_\beta = 1$ $\Rightarrow$ $\rho_\alpha = \frac{1}{\rho_\beta}$ (1)

Para $\alpha = a + bw$ temos $\rho_\alpha = \sqrt{a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}} = \sqrt{a^2-ab+b^2}$ com $\rho_\alpha \notin [\,0;\,1[$, ou seja, $\rho_\alpha \geq 1$ (2), pois a, b $\in$ Z

Assim, de (1) e (2), temos $0 < \rho_\beta \leq 1$

Analogamente, temos para $\beta \in$ E, $\rho_\beta \geq 1$. Logo $\rho_\alpha = \rho_\beta = 1$

Dessa forma, temos: $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 + ab$

Como $a^2 + b^2 \geq 0$ então $1 + ab \geq 0 \Rightarrow ab > -1 \Leftrightarrow ab \geq 0$

De $a^2 - 2ab + b^2 = 1 - ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 1 - ab$

Conclui-se que $ab \leq 1$, ou seja, $0 \leq ab \leq 1$

Assim, para ab = 1 temos a = b $\Rightarrow$ a = b = 1
a = b = -1

Para ab = 0, temos: |a – b| = 1 $\Rightarrow$ a = 1 , b = 0
a = -1, b = 0
a = -1, b = 0
a = 0 , b = 1
a = 0, b = -1

logo, os elementos de U são:

$$\boxed{U = \left\{1;-1;\text{cis}\frac{2\pi}{3};-\text{cis}\frac{2\pi}{3},1+\text{cis}\frac{2\pi}{3},-1-\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

b) sejam os elementos 6 + cis $\frac{2\pi}{3}$ e 5 – cis $\frac{2\pi}{3}$, por exemplo, ambos pertencentes ao conjunto E – U = Y, temos:

$$\left(6+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)\left(5-\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) = 30 - \text{cis}\frac{2\pi}{3} - \left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 30 + \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{31,}$$ que é primo.

8) Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

SOLUÇÃO IDEAL:

$p^n = q^2 - 12^2$ $\Rightarrow$ $p^n = (q - 12)(q + 12)$

Uma vez que p é primo, deve-se ter:

$\begin{cases} q-12=p^a \\ q+12=p^{n-a} \end{cases}$, onde n – a > a pois q + 12 > q – 12

Subtraindo as duas equações:

$p^{n-a} - p^a = 24 \Rightarrow p^a(p^{n-2a} - 1) = 2^3.3$

Se $a \neq 0$, sendo p um número, primo há apenas quatro possibilidades:

i) p = 2 e a = 1 $\Rightarrow 2^{n-2} - 1 = 12 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

ii) p = 2 e a = 2 $\Rightarrow 2^{n-4} - 1 = 6 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

iii) p = 2 e a = 3 $\Rightarrow 2^{n-6} - 1 = 3 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow q = 20$

iv) p = 3 e a = 1 $\Rightarrow 3^{n-2} - 1 = 2^3 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow q = 15$

Se a = 0: $q - 12 = 1 \Rightarrow q = 13 \Rightarrow p^n = 25 \Rightarrow p = 5$ e $n = 2$

Logo, os possíveis valores de (n, p, q) são $\boxed{(8, 2, 20) \text{ ou } (4, 3, 15) \text{ ou } (2, 5, 13)}$

9) Seja o sistema $\begin{cases} \text{tg}(x)\ \ \text{tg}(y-z) = a \\ \text{tg}(y)\ \ \text{tg}(z-x) = b \\ \text{tg}(z)\ \ \text{tg}(x-y) = c \end{cases}$, onde a, b, c, x, y, z $\in \mathfrak{R}$. Determine as condições que a,b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

SOLUÇÃO IDEAL:

Desenvolvendo as três equações obtém-se:

$\text{tgx}\dfrac{\text{tgy}-\text{tgz}}{1+\text{tgy.tgz}} = a \Rightarrow$ tgx.tgy – tgx.tgz – a.tgy.tgz = a

$\text{tgy}\dfrac{\text{tgz}-\text{tgz}}{1+\text{tgz.tgx}} = b \Rightarrow$ – tgx.tgy – b.tgx.tgz + tgy.tgz = b

$\text{tgz}\dfrac{\text{tgx}-\text{tgy}}{1+\text{tgx.tgy}} = c \Rightarrow$ – c.tgx.tgy + tgx.tgz – tgy.tgz = c

Fazendo m = tgx.tgy, n = tgx.tgz e p = tgy.tgz obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} m-n-a.p=a \\ -m-b.n+p=b \\ -c.m+n-p=c \end{cases}$$

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} m-n-a.p=a \\ -(b+1)n+(1-a)p=a+b \\ -c.m+(1-c)n-(1+ac)p=ac+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n-a.p=a \\ -(b+1)n+(1-a)p=a+b \\ (1-c)n-(1+ac)p=ac+c \end{cases} \Rightarrow$$

p[(1 – a)(1 – c) – (1 + ac)(b + 1)] = (a + b)(1 – c) + (ac + c)(b + 1) $\Rightarrow$ p[– abc – a – b – c] = abc + a + b + c (eq. 1)

Se abc + a + b + c $\neq$ 0 tem-se que p = – 1. Analogamente, se abc + a + b + c $\neq$ 0 tem-se m = – 1 e n = – 1.

Logo: tgx.tgy = – 1, tgx.tgz = – 1 e tgy.tgz = – 1

Multiplicando estas equações obtém-se $(\text{tgx.tgy.tgz})^2 = -1$, ou seja, não existem valores reais de x, y e z que satisfaçam o problema.

Por outro lado, se abc + a + b + c = 0, então p pode assumir qualquer valor real. Como a equação 1 é simétrica em relação aos números a, b e c, o mesmo vale para m e n.

Assim, é possível escolher convenientemente os valores de tgx.tgy = k_1, tgx.tgz = k_2 e tgy.tgz = k_3 de modo que:

$\text{tgx.tgy.tgz} = \pm\sqrt{k_1.k_2.k_3} \Rightarrow \text{tgx} = \pm\sqrt{\dfrac{k_1.k_2}{k_3}}$, $\text{tgy} = \pm\sqrt{\dfrac{k_1.k_3}{k_2}}$ e $\text{tgz} = \pm\sqrt{\dfrac{k_2.k_3}{k_1}}$, fazendo com que o sistema possua pelo menos uma solução para x, y e z.

Portanto, a condição para que o sistema possua solução é $\boxed{abc + a + b + c = 0.}$

10) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}}$, $a_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}}}$, $a_3 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}}}}$,.....

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

SOLUÇÃO IDEAL:

Inicialmente note que $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A lei de formação dada na questão é equivalente a $a_k = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{a_{k-1}}{2}} \Rightarrow 2.a_k^2 = 1 + a_{k-1}$

Comparando com a identidade trigonométrica $2.\cos^2 \alpha/2 = 1 + \cos \alpha$, pode-se então afirmar que existe um ângulo α tal que $a_k = \cos \alpha/2$ e $a_{k-1} = \cos \alpha$

Como $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ então $a_1 = \cos\dfrac{\pi}{6}$, $a_2 = \cos\dfrac{\pi}{2.6}$, $a_3 = \cos\dfrac{\pi}{4.6}$, ..., $a_{20} = \cos\dfrac{\pi}{2^{19}.6}$

Logo: $P_{20} = \cos\dfrac{\pi}{2^{19}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{16}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}$

Multiplicando e dividindo por $2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}$:

$$P_{20} = \frac{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}\cos\dfrac{\pi}{2^{19}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{16}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{16}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\dfrac{1}{2}\text{sen}\dfrac{30^\circ}{2^{17}}.\cos\dfrac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{16}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\dfrac{1}{2^2}\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{16}.6}.\cos\dfrac{\pi}{2^{16}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\dfrac{1}{2^3}.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{15}.6}...\cos\dfrac{\pi}{2.6}.\cos\dfrac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\text{sen}\dfrac{\pi}{3}}{2^{20}.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}.\text{sen}\dfrac{\pi}{2^{20}.3}}}$$

Solução Ideal – IME 2010 – Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

Equipe de Matemática
Prof. Marcelo Rufino
Prof. Márcio Pinheiro
Prof. Adenilson
Prof. Manoel Leite

Coordenação
Marcelo Rufino

Digitação
Cynthia Siqueira

Mais informações em www.grupoideal.com.br/idealmilitar/idealmilitar.html
Tel: 3323 5051