1) Sabe-se que:
$a = [a] + \{a\}, \forall a \in \Re$, onde $[a]$ é a parte inteira de a

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4,2 \\ y+[z]+\{x\}=3,6 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}, \text{ com } x, y \text{ e } z \in \Re$$

Determine o valor de $x - y + z$

Solução:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4,2 & \text{I} \\ y+[z]+\{x\}=3,6 & \text{II} \\ Z+[x]+\{y\}=2 & \text{III} \end{cases}$$

Somando as três equações, temos: $2(x + y + z) = 9,8 \Rightarrow x + y + z = 4,9$ IV
Fazendo IV – III, temos: $[y] + \{x\} = 2,9 \Rightarrow [y] = 2$ e $\{x\} = 0,9$
Fazendo IV – II, temos: $[x] + \{z\} = 1,3 \Rightarrow [x] = 1$ e $\{z\} = 0,3$
Portanto, conclui-se que: $\{x\} = 0,9$ e $[y] = 2$
Fazendo IV – I, temos: $[z] + \{y\} = 0,7 \Rightarrow [z] = 0$ e $\{y\} = 0,7$
Como $[y] = 2$, então $\{y\} = 0,7$ e $[Z] = 0$
Desta forma, temos a solução: $(x; y; z) = (1,9;\ 2,7;\ 0,3)$

$$\boxed{\text{Assim, } x - y + z = 1,9 - 2,7 + 0,3 = -0,5}$$

2) Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seus ângulos oposto $\hat{B} = 120^\circ$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias as outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a (s) equação (ões) do lugar geométrico e identifique a(s0 curvas(s) descrita(s).

Solução:

Sejam A, B e C os vértices do triângulo. No sistema dado, considerem-se $A\left(-\frac{b}{2},0\right)$, $C\left(\frac{b}{2},0\right)$, $B\left(0,\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)$ (pois $\hat{B}$ mede 120º e o triângulo é isósceles) e P (x, y) um ponto pertencente ao lugar geométrico. Sejam M, N e Q as projeções do ponto P sobre os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Então $PM^2 = PN \cdot PQ$ (*)

reta $\overleftrightarrow{AB}$: $2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3} = 0$

reta $\overleftrightarrow{BC}$: $-2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3} = 0$

De (*), vem: $|y|^2 = \dfrac{|2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3}|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2}} \cdot \dfrac{|-2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3}|}{\sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-6)^2}} \Leftrightarrow$

$y^2 = \dfrac{\left|\left(b\sqrt{3} - 6y\right)^2 - \left(2\sqrt{3}x\right)^2\right|}{48} \Leftrightarrow 48y^2 = |3b^2 - 12b\sqrt{3}\,y + 36y^2 - 12x^2| \Leftrightarrow$

$12x^2 + 12y^2 + 12b\sqrt{3}\,y = 3b^2$ ou $12x^2 - 84y^2 + 12b\sqrt{3}\,y = 3b^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \left(y + \dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2$: circunferência de centro em $\left(0,-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ e de raio b.

ou $\dfrac{x^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{7}}\right)^2} - \dfrac{\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{14}\right)^2}{\left(\frac{b}{7}\right)^2} = 1$: hipérbole, centrada em $\left(0,\dfrac{b\sqrt{3}}{14}\right)$, com semi-eixos: real, $\dfrac{b}{\sqrt{7}}$; imaginário, $\dfrac{b}{7}$.

3) Sabe-se que $z_1\overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.

Obs: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

Solução:

$|Z_3 + Z_4| = |Z_3 - Z_4| \iff |Z_3|^2 + |Z_4|^2 + 2\,|Z_3||Z_4| \cos\theta_{34} = |Z_3|^2 + |Z_4|^2 - 2|Z_3|\,|Z_4| \cos\theta_{34} \iff$

$4\,|Z_3|\,|Z_4| \cos\theta_{34} = 0 \iff \theta_{34} = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$ (Ângulo entre os complexos 3 e 4)

Portanto, sendo arg (w) o argumento do complexo não nulo w:

$z_1\overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4} \Rightarrow \arg(Z_1 . \overline{Z_2}) = \arg\left(\dfrac{Z_3}{Z_4}\right) \iff$

$\arg Z_1 + \arg \overline{z_2} = \arg Z_3 - \arg Z_4 = \theta_{34} \iff \arg Z_1 - \arg Z_2 = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2} \iff$ $\boxed{Z_1 \text{ e } Z_2 \text{ são ortogonais}}$

4) Dada a função F: $IN^2 \to IN$, com as seguintes características:

$F(0,0) = 1$

$F(n, m + 1) = q.\,F(n, m)$, onde q é um número real diferente de zero;

$F(n + 1, 0) = r^+ F(n, 0)$, onde r é um número real diferente de zero.

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i), i \in IN$.

Solução:

Perceba que a seqüência $a_n = F(n, 0)$ é uma PA de razão r, pois $a_{n+1} = a_n + r$.

Assim: $a_n = a_0 + nr \Rightarrow F(n, 0) = F(0, 0) + nr \Rightarrow F(n, 0) = nr + 1$

Por outro lado:

$F(n, n) = qF(n, n-1) = q^2F(n, n-2) = q^3F(n, n-3) = \ldots = q^nF(n, 0) \Rightarrow F(n, n) = q^n.(nr + 1)$

$$S = \sum_{i=0}^{2009} q^i(ir+1) = r\left(\sum_{i=0}^{2009} i.q^i\right) + \sum_{i=0}^{2009} q^i = r\left(\sum_{i=1}^{2009} i.q^i\right) + \sum_{i=0}^{2009} q^i =$$

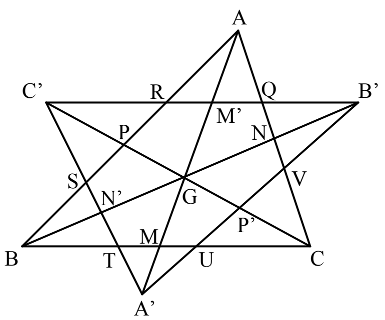
$$= r\left(\sum_{i=1}^{2009} q^i + \sum_{i=2}^{2009} q^i + \ldots + \sum_{i=2009}^{2009} q^i\right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} = r\left(\frac{q^{2010}-q}{q-1} + \frac{q^{2010}-q^2}{q-1} + \ldots + \frac{q^{2010}-q^{2009}}{q-1}\right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} =$$

$$= \frac{r}{q-1}\left[2009.q^{2010} - \left(\frac{q^{2010}-q}{q-1}\right)\right] + \frac{q^{2010}-1}{q-1} = \frac{r}{q-1}\,\frac{\left(2009.q^{2011} - 2010.q^{2010} + q\right)}{q-1} + \frac{q^{2010}-1}{q-1} =$$

$$\boxed{= \frac{(2009r+1)q^{2011} - (2010r+1)q^{2010} + qr - q + 1}{(q-1)^2}}$$

5) Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com áreas S. Considere os pontos A’, B’ e C’ obtidos por uma rotação de 180º dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e A’B’C’.

Solução:



Já que G é baricentro do triângulo ABC, AG = 2.GM. Como A’G = AG, conclui-se que G também é o baricentro do ΔA’B’C’. Como GM’ = MG, BM’ = BM e $M'\hat{G}B' = M\hat{G}B$, conclui-se que os triângulos BGM e B’GM’ são congruentes. Daí tem-se que $\overline{BM'} // \overline{BM}$. Assim, os triângulos ARQ e ABC são semelhantes, segundo a razão $\dfrac{AM'}{AM} = \dfrac{1}{3}$. Logo, a área do triângulo ARQ é $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 .S = \dfrac{S}{9}$. O mesmo raciocínio vale para os triângulos BST e CUV. Portanto, a área pedida é igual à soma das áreas dos triângulos A’B’C’ (congruentes a ABC) e dos triângulos ARQ, BST e CUV:

$$S + \frac{S}{9} + \frac{S}{9} + \frac{S}{9} = S + \frac{S}{3} = \boxed{\frac{4S}{3}}$$

6) Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3\mathrm{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\mathrm{sen}x - \left(1+4\sqrt{2}\right)\mathrm{sen}x\cos x + 4\cos x - 2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{2\mathrm{sen}x - 2\sqrt{2}\mathrm{sen}x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Solução:

$$\frac{3\mathrm{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\mathrm{sen}x - \left(1+4\sqrt{2}\right)\mathrm{sen}x\cos x + 4\cos x - 2\left(2+2\sqrt{2}\right) - 4\mathrm{sen}x + 4\sqrt{2}\mathrm{sen}x\cos x - 4\cos x + 2\sqrt{2}}{2\mathrm{sen}x - 2\sqrt{2}\mathrm{sen}x\cos x - \sqrt{2} + 2\cos x} > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2 x + 2 - \mathrm{sen}x\cos x - 2}{2\mathrm{sen}x\left(1-\sqrt{2}\cos x\right) - \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} = \frac{\mathrm{sen}x\left(\mathrm{sen}x - \cos x\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\mathrm{sen}x - 1\right)\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

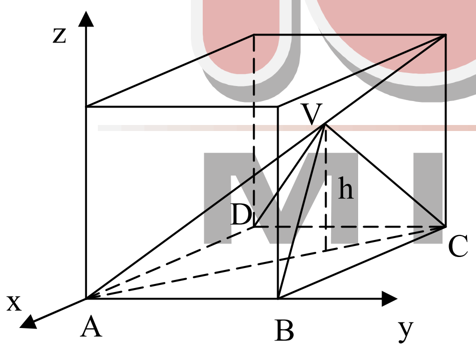
$0 \quad \pi/4 \quad \pi/2 \quad 3\pi/4 \quad \pi \quad 5\pi/4 \quad 7\pi/4 \quad 2\pi$

sen x	+	+	+	+	-	-	-
senx-cosx	-	+	+	+	+	-	-
$\sqrt{2}$ sen x - 1	-	+	+	-	-	-	-
1 - $\sqrt{2}$ cos x	-	+	+	+	+	+	-
Produto	-	+	+	-	+	-	+

$$\boxed{S = \left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\pi,\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right[}$$

7) Seja um cubo de base ABCD com aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2. Sendo k um número primo.
OBS: as arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

Solução:



Adotando um referencial em três dimensões com origem em A, eixo x passando por D, eixo y passando por B e eixo z perpendicular ao plano definido por A, B, C e D, tem-se as seguintes coordenadas:
A = (0, 0, 0), B = (0, a, 0), C = (–a, a, 0),
D = (–a, 0, 0), V = (–h, h, h)

Assim: $\overline{VA}^2 + \overline{VB}^2 + \overline{VC}^2 + \overline{VD}^2 = 3h^2 + 2h^2 + (h-a)^2 + (h-a)^2 + (h-a)^2 + h^2 + 2h^2 + (h-a)^2 =$
$= 4(3h^2 - 2ah + a^2)$, onde $0 \le h \le a$

O valor mínimo desta função em h ocorre para $h = \dfrac{a}{3}$ e vale $\dfrac{8a^2}{3}$, enquanto que o valor máximo ocorre para h = a e vale $8a^2$. Uma vez que no intervalo $\left[\dfrac{8}{3}, 8\right]$ existem os primos 3, 5 e 7, tem-se que:

i) $k = 3 \Rightarrow 4(3h^2 - 2ah + a^2) = 3a^2 \Rightarrow 12h^2 - 8ah + a^2 = 0 \Rightarrow (6h - a)(2h - a) = 0$

$\boxed{h = \dfrac{a}{6} \quad \text{ou} \quad h = \dfrac{a}{2}}$

ii) $k = 5 \Rightarrow 4(3h^2 - 2ah + a^2) = 5a^2 \Rightarrow 12h^2 - 8ah - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \dfrac{a\left(2+\sqrt{7}\right)}{6}}$

iii) $k = 7 \Rightarrow 4(3h^2 - 2ah + a^2) = 7a^2 \Rightarrow 12h^2 - 8ah - 3a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \dfrac{a\left(2+\sqrt{13}\right)}{6}}$

8) Dada um matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:
* os elementos da linha i da coluna n são da forma

$a_{1n} = -\binom{n}{n-i+1}$,

* os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij=1}$ para $i - j = 1$;
* todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e det(M) o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação det (x.I – A) = 0

Solução:

$$\text{A matriz } -A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{n}{1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Assim: } \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n}+0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1}+0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2}+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{n}{1}+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{n}{1} \end{vmatrix} = x^n + K$$

$$\text{Onde } K = \binom{n}{1}.(-1)^{2n}. \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{n}{2} \end{vmatrix}$$

Por recorrência, temos:

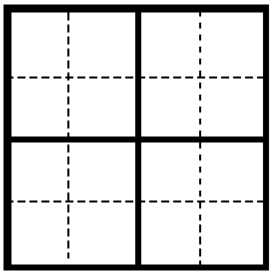
$$K = D_{n-1} = \binom{n}{1}x^{n-1} + D_{n-2} \Rightarrow K = \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n}x^{n-n}$$

Logo Det $(xI - A) = (x + 1)^n$.

Desta forma, as raízes da equação são todas iguais a $\boxed{-1.}$

9) A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1,2,3 e 4 de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

* uma mesma linha.
* uma mesma coluna.
* cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas



Solução:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Para facilitar o entendimento desta solução, será utilizado o padrão da distribuição dos elementos em uma matriz.
Inicialmente pode-se observar que existem 4! = 24 maneiras de preencher o quadrado que contém os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}. Para simplificar, será escolhida uma destas 24 maneiras para preencher este quadrado e será calculada, para esta quantidade de preencher este quadrado, o número de possibilidades de preencher o resto da figura.
Assim, será dotado $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$ e $a_{22} = 4$.

Para esta distribuição é possível preencher as duas primeiras linhas de 4 maneiras:

1	2	3	4
3	4	1	2

Perceba que se a 1ª coluna é preenchida com $a_{31} = 2$ e $a_{41} = 4$ então a 3ª coluna deve ser preenchida com $a_{33} = 4$ e $a_{43} = 2$. Por outro lado, se $a_{31} = 4$ e $a_{41} = 2$, então $a_{33} = 2$ e $a_{43} = 4$.
Analogamente, se $a_{32} = 1$ e $a_{41} = 3$, então $a_{34} = 3$ e $a_{44} = 1$ e $a_{32} = 3$ e $a_{41} = 1$, então $a_{34} = 1$ e $a_{44} = 3$.
Assim, neste 1º caso há 2.2 = 4 possibilidades de preencher o resto da figura

1	2	3	4
3	4	2	1

Note que, neste caso, o preenchimento do resto da 1ª coluna já determina o preenchimento de toda a figura. Por exemplo, se $a_{31} = 4$ e $a_{41} = 2$ então necessariamente tem-se que $a_{33} = 1$, $a_{43} = 4$, $a_{32} = 1$, $a_{42} = 3$, $a_{34} = 3$ e $a_{44} = 2$. Como há duas maneiras de acabar de preencher a 1ª coluna, então existem duas maneiras de acabar de preencher o resto da figura.

1	2	4	3
3	4	1	2

Este caso é análogo ao anterior, onde o preenchimento do resto da 1ª coluna já determina como toda a figura deve ser preenchida. Assim, há duas maneiras de acabar de preencher a figura.

1	2	4	3
3	4	2	1

Este último caso é análogo ao primeiro. Para cada uma das duas maneiras de acabar de preencher a 1ª coluna há uma maneira de acabar de preencher a 3ª coluna e para cada uma das duas maneiras de acabar de preencher a 2ª coluna há uma maneira de acabar de preencher a 4ª coluna. Assim, há 4 maneiras de acabar de preencher a figura.

Desta forma, o número de maneiras de preencher a figura vale: $24(4 + 2 + 2 + 4) = \boxed{288.}$

10) Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{2x}\text{, para } x \in \Re \text{ e } 0 \le x \le a.$$

Solução:

Fazendo-se a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (como $0 \le x \le a$ tem-se $0 \le \operatorname{sen} \theta \le 1$) obtém-se:

$$\sqrt{a}\sqrt{a + a\cos\theta} + \sqrt{3a}\sqrt{a - a\cos\theta} = 2\sqrt{2}a\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta \ge 0 \ \Rightarrow$$

$$a\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) = a \operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta \ge 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\theta$$

Assim, tem-se as seguintes possibilidades:

I) $\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \quad \Rightarrow \quad x = a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4k\pi\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

II) $\theta = \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3}$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{9} \Rightarrow \cos\theta < 0$ (não convém)

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{17\pi}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < 0$ (não convém)

$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{29\pi}{9} \Rightarrow \cos\theta < 0$ (não convém)

$k \geq 3$: os arcos encontrados são côngruos aos casos de k = 0, 1 ou 2.

Portanto, a única solução é $\boxed{x = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Solução Ideal – IME 2009 Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

Equipe de Matemática
Prof. Marcelo Rufino
Prof. Márcio Pinheiro
Prof. Adenilson
Prof. Cristian
Prof. Fabrício

Coordenação
Marcelo Rufino

Digitação
Leila Valéria
Cynthia Siqueira