

1) Determine o conjunto-solução da equação $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

SOLUÇÃO IDEAL

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (1 + \sin x \cos x)(1 - \sin x \cos x) \Leftrightarrow$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (1 + \sin x \cos x)(1 - \sin x \cos x) \Leftrightarrow (1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x - 1 - \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \sin x \cos x)[(\sin x - 1) - \cos x(\sin x - 1)] = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x \cos x)(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0.$$

Há, assim, três possibilidades:

I – $\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 2$ (não convém) ou

II – $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou

III – $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o conjunto – solução é: $S = \{ x \in \mathbb{R} : X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \}$

2) Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 \cdot P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4 , onde $Q(x)$ é um polinômio do 6º grau.

SOLUÇÃO IDEAL

Se o grau de $Q(x)$ é 6 e $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 P(x)$ então o grau de $P(x)$ é 3 $\Rightarrow P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Se $Q(x) + 2$ é divisível por x^4 então existe um polinômio $H(x)$ de segundo grau tal que $Q(x) + 2 = x^4 \cdot H(x) \Rightarrow$

$$Q(x) = x^4 \cdot H(x) - 2 = x^4(ex^2 + fx + g) - 2 \Rightarrow Q(x) = ex^6 + fx^5 + gx^4 - 2$$

$$Q(x) + 1 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \Rightarrow$$

$$ex^6 + fx^5 + gx^4 - 1 = ax^6 + (-3a + b)x^5 + (3a - 3b + c)x^4 + (-a + 3b - 3c + d)x^3 + (-b + 3c - 3d)x^2 + (3d - c)x - d$$

Comparando os coeficientes:

i) $d = 1$

ii) $3d - c = 0 \Rightarrow c = 3$

iii) $-b + 3c - 3d = 0 \Rightarrow b = 6$

iv) $-a + 3b - 3c + d = 0 \Rightarrow a = 10$

Desta forma, $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

3) Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d . Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não

trivial, sabendo, sabendo que $CD = -DC$, onde $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$,

SOLUÇÃO IDEAL

Calculando os produtos matriciais temos: $CD = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$ e $DC = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{pmatrix}$

Como $CD = -DC$ temos o sistema:
$$\begin{cases} 2ax + cy + bz = 0 \\ bx + (a + d)y + bw = 0 \\ cx + (d + a)z + cw = 0 \\ ay + bz + 2dw = 0 \end{cases}$$

Como o sistema deve ter Solução não trivial:
$$\begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & d+a & c \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ 0 & a+d & 0 & b \\ 0 & 0 & a+d & c \\ -2d & c & b & 2d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2a \begin{vmatrix} a+d & 0 & b \\ 0 & a+d & c \\ c & b & 2d \end{vmatrix} + 2d \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ a+d & 0 & b \\ 0 & a+d & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a[2d(a+d)^2 - 2bc(a+d)] + 2d[-2bc(a+d)] = 0 \Rightarrow$$

$$4(a+d)[ad(a+d) - abc - bcd] = 0 \Rightarrow 4(a+d)^2(ad - bc) = 0$$

Logo: $a = -d$ ou $ad = bc$

4) Uma seqüência de quatro termos forma uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e k do quarto termo, transforma-se a seqüência original em uma PA. Uma terceira seqüência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta seqüência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira seqüência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine os termos da PG original.

SOLUÇÃO IDEAL

Seja (a, aq, aq^2, aq^3) a PG original. Obtêm-se, de acordo com o enunciado, as sucessivas seqüências seguintes:

$(a - 2, aq, aq^2, aq^3 - k)$ (II)

$(2a - 2, 2aq, 2aq^2, 2aq^3 - k)$ (III)

$(2a - 2, 2aq, 2aq^2 - 2; 2aq^3 - k - 7)$ (IV)

Como a seqüência II é uma PA, a soma do 1º e do 4º termos é igual à do 3º e do 4º termos. Analogamente, para a seqüência IV. Assim:

$$\begin{cases} aq^3 - k + a - 2 = aq^2 + aq \\ 2aq^3 - k - 7 + 2a - 2 = 2aq^2 - 2 + 2aq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aq^2 + aq = aq^3 + a - k - 2 \\ 2aq^3 + 2a - k - 7 = 2aq^2 + 2aq \end{cases} \text{ Substituindo:}$$

$2aq^3 + 2a - k - 7 = 2(aq^3 + a - k - 2) \Leftrightarrow -k - 7 = -2k - 4 \Leftrightarrow k = 3$. Portanto, em (II), $(a - 2, aq, aq^2, aq^3 - 3)$ é uma PA, e:

$$\begin{cases} 2aq = aq^2 + a - 2 \\ 2aq^2 = aq^3 + aq - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2q = -3 \Rightarrow q = \frac{3}{2}. \text{ Daí: } 3a = \frac{9a}{4} + a - 2 \Rightarrow a = 8. \text{ Assim, os termos da PG original são } (8, 12, 18, 27)$$

5) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

1ª SOLUÇÃO IDEAL

Nesta questão utilizaremos o princípio da inclusão-exclusão.

Não é citado na questão, mas vamos considerar que os carros de uma mesma equipe são diferentes.

Se 1, 2, 3, 4 e 5 são as equipes, considere os seguintes eventos:

A_1 = os dois carros da equipe 1 estão lado a lado.

A_2 = os dois carros da equipe 2 estão lado a lado.

A_3 = os dois carros da equipe 3 estão lado a lado.

A_4 = os dois carros da equipe 4 estão lado a lado.

A_5 = os dois carros da equipe 5 estão lado a lado.

Pelo princípio da inclusão-exclusão: $N = 10! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) \Rightarrow$

$$N = 10! \left[\sum_{1 \leq i \leq 5} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < m \leq 5} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \right]$$

Vamos agora detalhar a contagem de cada um destes termos:

i) $n(A_i)$: 5 termos

escolher onde vai ficar a equipe i: $5 \cdot 2 = 10$ possibilidades

permutar os demais carros: $8!$ possibilidades

ii) $n(A_i \cap A_j)$: 10 termos

escolher onde vão ficar as equipes i e j: $5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ possibilidades

permutar os demais carros: $6!$ possibilidades

iii) $n(A_i \cap A_j \cap A_k)$: 10 termos

escolher onde vão ficar as equipes i, j e k: $(5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ possibilidades

permutar os demais carros: $4!$ possibilidades

iv) $n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m)$: 5 termos

escolher onde vão ficar as equipes i, j, k e m: $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1920$ possibilidades

permutar os demais carros: $2!$ possibilidades

v) $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$: 1 termo

escolher onde vão ficar as equipes 1, 2, 3, 4 e 5: $5! \cdot 2^5 = 3840$ possibilidades

Desta forma:

$$N = 3628800 - [5 \cdot 10 \cdot 8! - 10 \cdot 80 \cdot 6! + 10 \cdot 240 \cdot 4! - 5 \cdot 1920 \cdot 2! + 3840] \Rightarrow N = 2088960$$

2ª SOLUÇÃO IDEAL

Sejam A, B, C, D e E as equipes e sejam $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ e E_2 os carros. Vamos separar a contagem nos seguintes casos:

1º caso: Nenhum carro com índice 1 ao lado de outro carro com índice 1:

A_1	B_1	C_1	D_1	E_1
C_2	E_2	A_2	B_2	D_2

- permutar os 5 carros com índice 1: $5! = 120$ possibilidades

- permutar caoticamente os 5 carros com índice 2: $5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$ possibilidades

- trocar de lado os carros: $2^5 = 32$ possibilidades

Total = $120 \cdot 44 \cdot 32 = 168960$

2º caso: exatamente um carro com índice 1 ao lado de outro carro com índice 2:

A_1	B_1	D_1	A_2	E_2
B_2	C_1	E_1	C_2	D_2

- escolher os dois carros com índices diferentes: $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades

- permutar os quatro carros com índice 1 e os quatro com índice 2: $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades

- permutar as cinco linhas de carros: $5! = 120$ possibilidades

- trocar de lado os carros: $2^5 = 32$ possibilidades

Total = $20 \cdot 9 \cdot 32 \cdot 120 = 691200$

3º caso: exatamente três carros de índice 1 ao lado de outro carro de índice 2:

Este terceiro caso tem que ser separado em três situações.

i) as mesmas três equipes com índices diferentes em lados opostos da largada:

A_1	B_1	C_1	D_1	E_2
B_2	C_2	A_2	E_1	D_2

- escolher as três equipes: $C_{5,3} = 10$ possibilidades

- permutar caoticamente estas três equipes de índice 2: $3! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = 2$ possibilidades

- permutar as cinco linhas de carros: $5! = 120$ possibilidades

- trocar de lado os carros: $2^5 = 32$ possibilidades

Total = $10.2.120.32 = 76800$

ii) as mesmas duas de três equipes com índices diferentes em lados opostos da largada:

A ₁	B ₁	C ₁	D ₁	C ₂
D ₂	A ₂	B ₂	E ₁	E ₂

- escolher as três equipes de índice 1: $C_{5,3} = 10$ possibilidades

- escolher duas destas três equipes como as de índice 2: $C_{3,2} = 3$ possibilidades

- escolher a terceira equipe de índice 2: 2 possibilidades

- colocar as equipes de índice 2 ao lado das de índice 1: 3 possibilidades

- permutar as cinco linhas de carros: $5! = 120$ possibilidades

- trocar de lado os carros: $2^5 = 32$ possibilidades

Total = $10.3.2.3.120.32 = 691200$

iii) repetir somente uma mesma equipe de índices 1 e 2 em lados opostos da largada:

A ₁	B ₁	C ₁	D ₁	B ₂
E ₂	A ₂	D ₂	E ₁	E ₂

- escolher as três equipes de índice 1: $C_{5,3} = 10$ possibilidades

- escolher uma destas equipes para ser a de índice 2: 3 possibilidades

- colocar as equipes de índice 2 ao lado das de índice 1: 4 possibilidades

- permutar as cinco linhas de carros: $5! = 120$ possibilidades

- trocar de lado os carros: $2^5 = 32$ possibilidades

Total = $10.3.4.120.32 = 460800$

Desta forma, existem $168960 + 691200 + 76800 + 691200 + 460800 = 2088960$ possibilidades de largada.

6) Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4.

$$1 + 2i + 3i^2 + \dots + (n+1)i^n$$

1ª SOLUÇÃO IDEAL

Seja $S = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + (n+1)i^n \Rightarrow$

$$S = (1 + i + i^2 + \dots + i^n) + (i + i^2 + i^3 + \dots + i^n) + (i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^n) + \dots + (i^{n-1} + i^n) + i^n \Rightarrow$$

$$S = \frac{1(i^{n+1} - 1)}{i - 1} + \frac{i(i^n - 1)}{i - 1} + \frac{i^2(i^{n-1} - 1)}{i - 1} + \dots + \frac{i^{n-1}(i^2 - 1)}{i - 1} + \frac{i^n(i - 1)}{i - 1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{i^{n+1} - 1 + i^{n+1} - i + i^{n+1} - i^2 + \dots + i^{n+1} - i^{n-1} + i^{n+1} - i^n}{i - 1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{(n+1)i^{n+1} - (1 + i + i^2 + \dots + i^{n-1} + i^n)}{i - 1} \Rightarrow S = \frac{(n+1)i^{n+1} - \frac{1(i^{n+1} - 1)}{i - 1}}{i - 1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{(n+1)(i-1)i^{n+1} - i^{n+1} + 1}{(i-1)^2} \Rightarrow S = \frac{(n+1)i^{n+2} - (n+1)i^{n+1} - i^{n+1} + 1}{(i-1)^2} \Rightarrow S = \frac{(n+1)i^{n+2} - (n+2)i^{n+1} + 1}{(i-1)^2}$$

Se i for a unidades imaginária (esta informação não é dada no enunciado) e sendo $n = 4k$ temos que:

$$S = \frac{(n+1)i^{4k+2} - (n+2)i^{4k+1} + 1}{(i-1)^2} = \frac{-n-1-(n+2)i+1}{-2i} = \frac{-n-(n+2)i}{-2i} = \left[\frac{-n-(n+2)i}{-2i} \right] \cdot \frac{i}{i} = \frac{(n+2)-ni}{2}$$

2ª SOLUÇÃO IDEAL

Seja $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1}$. Pela expressão do somatória da PG sabe-se que: $P(x) = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$, ou seja, pode-se

escrever que $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$. Derivando os dois lados da última igualdade:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = \frac{(n+2)x^{n+1}(x-1) - (x^{n+2} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+2)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - x^{n+2} + 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \Rightarrow S(i) = \frac{(n+1)i^{n+2} - (n+2)i^{n+1} + 1}{(i-1)^2}$$

Assim, se i for a unidade imaginária e sendo n múltiplo de 4:

$$S(i) = \frac{(n+1)i^{4k+2} - (n+2)i^{4k+1} + 1}{(i-1)^2} = \frac{-n-1-(n+2)i+1}{-2i} = \frac{-n-(n+2)i}{-2i} = \left[\frac{-n-(n+2)i}{-2i} \right] \cdot \frac{i}{i} = \frac{(n+2)-ni}{2}$$

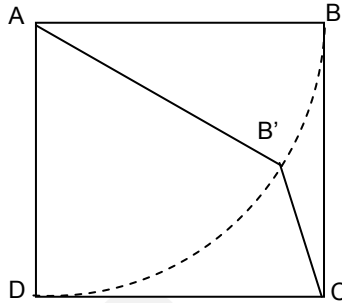
7) A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

SOLUÇÃO IDEAL

Seja r e h o raio da base e a altura da calota, respectivamente, e R o raio da superfície esférica que origina a calota, tem-se que: $2\pi Rh = 2\pi r^2 \Leftrightarrow Rh = r^2 = R^2 - (R-h)^2 \Leftrightarrow Rh = 2Rh - h^2 \Leftrightarrow h(h - R) = 0$.

Como $h > 0$: $h = R \Rightarrow r = R$, ou seja, a calota é um hemisfério, e sua base é, portanto, um círculo máximo da esfera, supondo que a calota não é degenerada.

8) Em um quadrado ABCD o segmento AB', com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo, conforme indicado na figura. Determine o ângulo BÂB' e o lado do quadrado vale $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$.



SOLUÇÃO IDEAL

Para que $\frac{B'C}{BC}$ seja igual a $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ há duas possibilidades: $B'AB < 45^\circ$ e $B'AB > 45^\circ$, isto é, $B\hat{A}B = 45^\circ - \alpha$ ou $B\hat{A}B' = 45^\circ + \alpha$

onde α é o ângulo $C\hat{A}B'$. Então: sendo $\overline{BC} = l$, $\overline{AB'} = l$, $\overline{B'C} = X$: $\frac{B'C}{BC} = \frac{X}{l} = \sqrt{3 - \sqrt{6}} \Leftrightarrow X = l\sqrt{3 - \sqrt{6}}$

Para o $\Delta AB'C$: $x^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 - 2 \cdot l \cdot l\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow l^2(3 - \sqrt{6}) = l^2 + 2l^2 - 2l^2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$

$3l^2 - \sqrt{6}l^2 = 3l^2 - 2l^2\sqrt{2} \cos \alpha \Leftrightarrow 3 - \sqrt{6} = 3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30^\circ$.

Assim: $B\hat{A}B = 15^\circ$ ou $B\hat{A}B' = 75^\circ$

9) Considere os números complexos $Z_1 = \text{sen } \alpha + i \cos \alpha$ e $Z_2 = \cos \alpha - i \text{sen } \alpha$, onde α é um número real. Mostre que, se $Z = Z_1 Z_2$, então $-1 \leq \text{Re}(Z) \leq 1$ e $-1 \leq \text{Im}(Z) \leq 1$, onde $\text{Re}(Z)$ e $\text{Im}(Z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

SOLUÇÃO IDEAL

Note que se $Z_1 = \text{sen } \alpha + i \cos \alpha$ e $Z_2 = \cos \alpha - i \text{sen } \alpha$ então $Z_1 = i \cdot Z_2$.

Portanto: $Z = Z_1 Z_2 = (i Z_2) \cdot Z_2 = i Z_2^2 = i (\cos \alpha - i \text{sen } \alpha)^2 = i [\cos(-\alpha) + i \text{sen}(-\alpha)]^2 = i [\cos(-2\alpha) + i \text{sen}(-2\alpha)] \Leftrightarrow$

$Z = -\text{sen}(-2\alpha) + i \cos(-2\alpha) \Leftrightarrow Z = \text{sen}(2\alpha) + i \cos(2\alpha)$.

Portanto: $-1 \leq \text{Re}(z) = \text{sen}(2\alpha) \leq 1$, Bem como $-1 \leq \text{Im}(z) = \cos(2\alpha) \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

10) Considere todos os pontos de coordenadas (x, y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$.

Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

1ª SOLUÇÃO IDEAL

Chamando $\frac{y}{x} = k$, temos então o seguinte sistema de 2 equações:

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \end{cases}, \text{ que possui solução única quando } k \text{ (coef. angular da } 1^\circ \text{ equação) for máximo ou mínimo}$$

(situação em que a reta é tangente a circunferência dada pela 2ª equação)

Para o sistema possuir solução única, temos que: $Y = kx \Rightarrow x^2 + k^2 x^2 - 6x - 6kx + 14 = 0$

$x^2(1 + k^2) - (6 + 6k)x + 14 = 0$, equação do 2º grau com solução única para

$$\Delta = 0 \Rightarrow 36 + 72k + 36k^2 - 4(1 + k^2) \cdot 14 = 0 \Rightarrow 36 + 72k + 36k^2 - 56 - 56k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-20k^2 + 72k + 20 = 0 \Rightarrow 20k^2 - 72k + 20 = 0 \Rightarrow 5k^2 - 18k + 5 = 0, \text{ com raízes } \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{5}, \text{ então o valor máximo de } k =$$

$$\frac{y}{x} \text{ é } \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}.$$

2ª SOLUÇÃO IDEAL

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Rightarrow \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1.$$

Parametrizando esta circunferência temos que $x = 2 \cdot \cos \theta + 3$ e $y = 2 \cdot \sin \theta + 3 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2 \cdot \sin \theta + 3}{2 \cdot \cos \theta + 3}$

Derivando em relação a θ obtém-se: $\frac{d(y/x)}{d\theta} = \frac{(2 \cdot \cos \theta)(2 \cdot \cos \theta + 3) - (-2 \sin \theta)(2 \cdot \sin \theta + 3)}{(2 \cdot \cos \theta + 3)^2} \Rightarrow$

$$\frac{d(y/x)}{d\theta} = \frac{6 \cdot \cos \theta + 6 \cdot \sin \theta + 4}{(2 \cdot \cos \theta + 3)^2}$$

De modo que y/x seja máximo a derivada acima tem que valer zero: $6 \cdot \cos \theta + 6 \cdot \sin \theta + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 \theta + 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{5}{9} \Rightarrow \cos 2\theta = \pm \frac{2\sqrt{14}}{9} \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{9 \mp 2\sqrt{14}}{18}} \text{ e } \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{18}}$$

De modo que $\frac{2 \cdot \sin \theta + 3}{2 \cdot \cos \theta + 3}$ seja máximo deve-se minimizar o denominador:

$$\text{Logo: } \left(\frac{y}{x}\right)_{\max} = \frac{2 \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{14}}{18}} + 3}{-2 \sqrt{\frac{9 + 2\sqrt{14}}{18}} + 3} = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}$$



Solução Ideal - IME 2007/2008 - Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores do **Ideal Militar**

Equipe de Matemática

Prof. Marcelo Rufino
Prof. Márcio Pinheiro
Prof. Manoel Leite

Prof. Elyston Moura
Prof. Eurico Dias
Prof. Adenilson Bonfim

Digitação

Cynthia Maria de Siqueira
Betânea Silva

Coordenação

Marcelo Rufino

Ideal Militar: Rua dos Mundurucus, 1412, entre as ruas Apinagés e Tupinambás
Tel: (91) 3233-5051
www.grupoideal.com.br