01) Considere as matrizes A = $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que B = $P^{-1}AP$. Sendo **n** um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

Solução:

Inicialmente, det A = $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Como conseqüência do teorema de Binet, det (A^n) = (det A)^n, para toda matriz qualquer matriz quadrada A e todo n natural. Então, $\det(A^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

02) Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por:

$$a_{K+1} = \frac{2}{3} a_K$$

$$b_{K+1} = \frac{4}{5} b_K$$

onde a_K e b_K, para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do K-ésimo triângulo retângulo. Se a_1 = 30 cm e b_1 = 42 cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando K –> ∞.

Solução:
Seja S_k a área do k-ésimo triângulo retângulo. Então, $S_{k+1} = \frac{a_{k+1} \cdot b_{k+1}}{2} = \frac{\frac{2}{3}a_k \cdot \frac{4}{5}b_k}{2} = \frac{8}{15} \cdot S_k$. Logo, as áreas dos triângulos formam uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{15}$ e primeiro termo $S_1 = \frac{30 \cdot 42}{2} = 630$ cm^2. Já que a razão é um número entre – 1 e 1, a soma dos infinitos termos desta P.G. converge para o número: $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{S_1}{1-q} = \frac{630}{1-\frac{8}{15}} = 1350$ cm^2.

03) Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} 3\log \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2\log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde α e β são números reais positivos. Determine o valor de P = αβ.

Solução:

$$\begin{cases} 3\log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2\log_3 \beta = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\log_3 \alpha + \frac{1}{2}.\log_3 \beta = 10 \\ \frac{1}{2}\log_3 \alpha - 2\log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

$12\log_3 \alpha + \frac{1}{2}\log_3 \alpha = 50$ **=>** $\frac{25}{2}.\log_3 \alpha = 50 \Rightarrow$

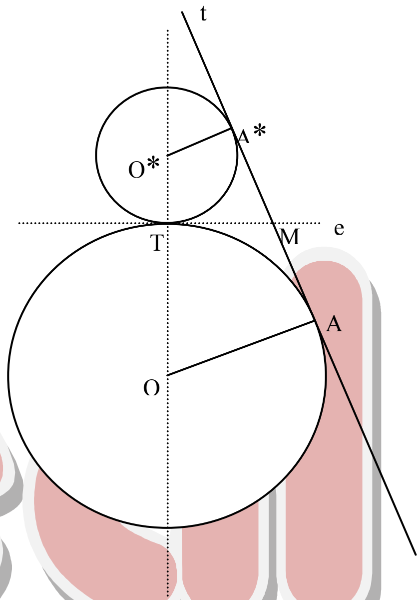
$\alpha = 3^4 = 81$

3. $\log_3 3^4 + \log_9 \beta = 10$ **=>** $\log_9 \beta = -2 \Rightarrow \beta = \frac{1}{81}$

P = $\alpha\beta = 1$

04) Sejam C e C* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r* e centros O e O*, respectivamente, e seja **t** uma reta tangente comum a C e C* nos pontos não coincidentes A e A*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA* em torno do eixo OO*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r*.

Solução:



Pelo teorema de Guldin, a área pedida é tal que:
S = 2π.AA*.d,
em que d é a distância de M, médio de AA*, Ao eixo $\overleftrightarrow{OO^*}$.

No trapézio retângulo AA*O*O, de bases r e r* e com um lado oblíquo OO*, pode-se encontrar AA* por:
$(r + r^*)^2 = (r - r^*)^2 + AA^{*2} \Leftrightarrow AA^* = 2\sqrt{rr^*}$

Seja e o eixo radical de C e C*. Trata-se de uma reta perpendicular a $\overline{OO^*}$, pelo ponto de Tangência T. O eixo encontra t em M, uma vez que M tem iguais potências em relação aos círculos. Portanto:

$$d = MT = MA = MA^* = \frac{AA^*}{2}$$

Finalmente:
S = 2π. 2 $\sqrt{rr^*}.\sqrt{rr^*}$ = 4πrr*

05) Resolva a equação:

$$\log_{(\text{sen } x + \cos x)}(1 + \text{sen } 2x) = 2,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Solução:

Condições de existência de soluções reais, em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

I. $1 + \text{sen } 2x > 0 \Leftrightarrow (\text{sen } x + \cos x)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\text{sen } x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4}$

II. $0 < \operatorname{sen} x + \cos x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Já que x está no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deve-se impor que:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \pm\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \\ x \neq 0 \ \text{ e } \ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, conclui-se que a equação tem solução real se $-\frac{\pi}{4} < x < 0 \cup 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Deste modo:
$\log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)}(1 + \operatorname{sen} 2x) = \log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)}(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2 \cdot \log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)}(\operatorname{sen} x + \cos x) = 2$, para todo x do domínio da equação.

Finalmente, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{x \in IR /\ -\frac{\pi}{4} < x < 0 \cup 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$$

06) O quadrilátero BRAS, de coordenadas A(1,0), B(– 2,0), $R(x_1,y_1)$ e $S(x_2,y_2)$ é construído tal que $R\hat{A}S$ = $R\hat{B}S$ = 90º. Sabendo que o ponto R pertence à reta **t** de equação y = x + 1, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre **t**.

Solução:
Se R pertence a y = x+1 então é da forma R:(a, a+1)

Logo: $m_{BR} = \frac{a+1}{a+2} \Rightarrow m_{BS} = -\frac{(a+2)}{a+1}$

$m_{AR} = \frac{a+1}{a-1} \Rightarrow m_{AS} = -\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$

reta BS: $y = -\frac{(a+2)}{a+1}(x+2) \Rightarrow a = -\frac{(2x+y+4)}{x+y+2}$ (1)

reta AS: $y = -\frac{(a-1)}{a+1}(x-1) \Rightarrow a = \frac{x-y-1}{x+y-1}$ (2)

Igualando (1) e (2) obtemos:
$(x - y - 1)(x + y + 2) = -(2x + y + 4)(x + y - 1) \Rightarrow$
$x^2 + xy + x = 2$, com $x \neq 1$ e $x \neq -2$.

07) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para **m**.

Solução:
$X^2 + (m-15)x + m = 0$

Se x_1 e x_2 são raízes da equação acima e x_1 e x_2

São inteiros, então:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m-15) \\ x_1 . x_2 = m \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 15 - x_1.x_2 \Leftrightarrow$

$x_1.x_2 + x_1 = 15 - x_2 \Leftrightarrow x_1(x_2+1)+1+x_2 = 16 \Leftrightarrow$
$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 16$

Assim $(x_1 + 1)$ e (x_2+1) são divisores de 16, então

(x_1+1)	(x_2+1)	16	x_1	x_2	$m=x_1.x_2$
–16	–1	–16. –1	–17	–2	34
–8	–2	–8. –2	–9	–3	27
–4	–4	–4. –4	–5	–5	25
–2	–8	–2. –8	–3	–9	27
–1	–16	–1. –16	–2	–17	34
1	16	1. –16	0	15	0
2	8	2.8	1	7	7
4	4	4.4	3	3	9
8	2	8.2	7	1	7
16	1	16.1	15	0	15

Valores possíveis de m = {0,7,9,25,27,34}

08) Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as m + n bolas.
Observação: uma seqüência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

Solução:
Se m ímpar e n ímpar é impossível existir simetria, ou seja, existem 0 seqüências simétricas.
Se m ímpar e n par ou m par e n ímpar a bola central é da cor das bolas de quantidade ímpar e para determinar cada seqüência basta escolher as $\frac{m+n-1}{2}$ primeiras bolas, que as demais estão determinadas. Assim, o número de permutações é:

i) se m par e n ímpar: $\frac{\left(\frac{m}{2}+\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$

ii) se m ímpar e n par: $\frac{\left(\frac{n}{2}+\frac{m-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$

Se m par e n par basta escolhermos os $\frac{m+n}{2}$ primeiros elementos: $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$

09) Sejam **a**, **b** e **c** números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

Solução:
I – se $a+b+c \neq 0$ podemos aplicar propriedade de proporção:

$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{c+a+b} =$
$\frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$

II – se a+b+c=0 => $\frac{a+b}{c} = -1$

10) Seja f: IN –> IR uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde IN e IR são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.

Solução:

$\sum_{K=0}^{2006} f(k) = \left(\sum_{K=0}^{2005} f(k)\right) + f(2006) =$

$= 2008.\frac{2006}{2007} + f(2006) = 2008.\frac{2007}{2008} =>$

$f(2006) = 2007 - \frac{2008.2006}{2007} = \frac{2007^2 - (2007+1)(2007-1)}{2007}$

$= \frac{2007^2 - 2007^2 + 1}{2007} => \frac{1}{f(2006)} = 2007$

CONCURSO DE BOLSAS 2007
IDEAL MILITAR

PERÍODO DE INSCRIÇÕES: 16 A 27 DE NOVEMBRO

VALOR DA INSCRIÇÃO: R$ 5,00

DATA DAS PROVAS:
29 DE NOVEMBRO (ACESSO À 8ª SÉRIE MILITAR, 1º ANO MILITAR E CONVÊNIO USP/UNICAMP/UNB)
30 DE NOVEMBRO (ACESSO AO 2º ANO MILITAR E CONVÊNIO MILITAR)

PROVAS E PROGRAMAS:
ACESSO À 8ª SÉRIE MILITAR: PORTUGUÊS E MATEMÁTICA (PROGRAMA DO ENSINO FUNDAMENTAL)
ACESSO AO 1º ANO MILITAR: PORTUGUÊS E MATEMÁTICA (PROGRAMA DO ENSINO FUNDAMENTAL)
ACESSO AO 2º ANO MILITAR: PORTUGUÊS E MATEMÁTICA (PROGRAMA DO PSS1)
ACESSO AO CONVÊNIO MILITAR: PORTUGUÊS, MATEMÁTICA E FÍSICA (PROGRAMA DO PSS2)
ACESSO AO CONVÊNIO USP/UNICAMP/UNB: PORTUGUÊS, MATEMÁTICA, BIOLOGIA E HISTÓRIA (PROGRAMA DO PSS2)

DATA DE DIVULGAÇÃO DO RESULTADO: 04 DE DEZEMBRO

INÍCIO DAS MATRÍCULAS: 04 DE DEZEMBRO