1ª Questão

Sejam $a_1 = 1 - i$, $na = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de **n**, os valores de **r** e **s** que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que **r** e **s** são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Solução:

Supondo que a_1, a_n e a_{n+1} são termos de uma PA, então podemos usar a fórmula do termo geral:

$a_{n+1} = a_n + d$ (I) e $a_n = a_1 + (n - 1).d$ (II), onde d é a razão desta PA.

De (I), obtém-se: $(r - s) + (r + s)i = r + si + d \Rightarrow d = -s + ri$

De (II),obtém-se: $(r + si) = 1 - i + (n - 1).(-s + ri) \Rightarrow (r + ns - s)+(s - nr + r)i = 1 - i$

Da igualdade entre complexos concluímos que:

$r + ns - s = 1$ (iii)

$s - nr + r = -1$ (iv)

Isolando r na equação (iii) e substituindo em (iv):

$s + 1 + s(1 - n) - nr = -1 \Rightarrow 2s + 2 - sn - n - ns + n^2s = 0 \Rightarrow (n^2 - 2n + 2)s = n - 2 \Rightarrow$

$$s = \frac{n-2}{n^2-2n+2} \Rightarrow r = 1 + \frac{(1-n)(n-2)}{n^2-2n+2} = \frac{n}{n^2-2n+2}$$

2ª Questão

Considere o polinômio: $p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$.

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Solução:

Como os coeficientes de p(x) são reais se um número complexo é raiz do polinômio, então seu conjugado também é. Uma vez que o valor fornecido da multiplicação de duas de suas raízes é um número complexo, então esta multiplicação **não** é o produto de duas raízes complexas conjugadas. Portanto, podemos afirmar que p(x) possui dois pares de raízes complexas conjugadas. Assim, as 5 raízes são da forma $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c$, onde $a.b = 3 - i$.

Note que: $\bar{a}.\bar{b} = \overline{a.b} = 3 + i$, ou seja, a multiplicação das outras duas raízes complexas resulta em $3 + i$.

Pelas relações de Girard temos: $a.\bar{a}.b.\bar{b}.c = -30 \Rightarrow (3 - i)(3 + i).c = -30 \Rightarrow 10.c = -30 \Rightarrow c = -3$

Dividindo p(x) por (x + 3) obtemos $p(x) = (x + 3)(x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10)$, onde as raízes de $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ são a, $\bar{a}$, b e $\bar{b}$.

Pelas Relações de Girard temos:

(I) $a + \bar{a} + b + \bar{b} = 6$

(II) $a.\bar{a}.b + a.\bar{a}.\bar{b} + a.b.\bar{b} + \bar{a}.b.\bar{b} = 18 \Rightarrow (3 - i)\bar{a} + (3 + i)a + (3 - i)\bar{b} + (3 + i)b = 18 \Rightarrow$

$3(a + \bar{a} + b + \bar{b}) + i(a - \bar{a} + b - \bar{b}) = 18 \Rightarrow 3(a + \bar{a} + b + \bar{b}) + i(a - \bar{a} + b - \bar{b}) = 18 \overset{(I)}{\Rightarrow} 18 + i(a - \bar{a} + b - \bar{b}) = 18 \Rightarrow$

$a - \bar{a} + b - \bar{b} = 0 \Rightarrow a + b = \bar{a} + \bar{b} \overset{(I)}{\Rightarrow} a + b = \bar{a} + \bar{b} = 3$

Assim, temos que: $a + b = 3$ e $a.b = 3 - i \Rightarrow$ a e b são soluções de $x^2 - 3x + 3 - i = [x - (1 - i)][x - (2 + i)] = 0 \Rightarrow$

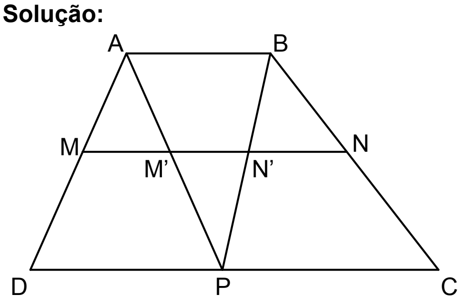
$a = 1 - i$ e $b = 2 + i \Rightarrow \bar{a} = 1 + i$ e $\bar{b} = 2 - i$.

Portanto, todas as raízes de p(x) são -3, $1 + i$, $1 - i$, $2 + i$, $2 - i$.

3ª Questão

Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM'N'N. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio M'N'CD em função da área de ABCD.

Solução:



Sejam AB = y, CD = x e h a altura do trapézio.

Uma vez que MN é base média de ABCD então $MN = \frac{x+y}{2}$.

Como M' e N' dividem o segmento MN em três partes iguais, então $M'N' = \frac{x+y}{6}$. Já que os triângulos ABP e M'N'P são semelhantes na razão de 2 para 1: $\frac{AB}{M'N'} = 2 \Rightarrow y = 2\frac{x+y}{6} \Rightarrow 3y = x + y \Rightarrow x = 2y$

Área de ABCD: $S_{ABCD} = \frac{(x+y)h}{2} = \frac{3yh}{2}$

$$\text{Área de M'N'CD: } S_{M'N'CD} = \frac{(CD + M'N')\frac{h}{2}}{2} = \frac{\left(x + \frac{x+y}{6}\right)h}{4} = \frac{(7x+y)h}{24} = \frac{15yh}{24} = \frac{5yh}{8}.$$

$$\text{Logo: } \frac{S_{M'N'CD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5yh}{8}}{\frac{3yh}{2}} = \frac{5}{12} \Rightarrow S_{M'N'CD} = \frac{5}{12}S_{ABCD}.$$

4ª Questão

Seja $D_n = \det(A_n)$, onde $A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{nxn}$

Determine D_n em função de **n** ($n \in IN$, $n \geq 1$).

Solução:

Aplicando o TEOREMA DE LAPLACE à 1º linha do determinante dado:

$$D_n = 2.\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{n-1}} + (-1).(-1)^{1+2}.\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{(n-1)x(n-1)}$$

$$D_n = 2D_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{(n-1)x(n-1)}$$

Novamente, aplicando Laplace à 1º coluna do último determinante, vem que :

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1).\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{(n-2)x(n-2)} \Rightarrow$$

$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, que representa uma recorrência de 2^{o} Ordem. Nesta recorrência, como $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$, conclui-se que $D_n - D_{n-1} = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - |2| = 1$, ou seja, a seqüência D_n é uma PA de razão 1, cujo termo geral é $D_n = D_1 + (n - 1)(1) = 2 + n - 1 = n + 1$.

5ª Questão

Determine os valores de **x**, **y**, **z** e **r** que satisfazem o sistema

$$C^{r}_{r+y} = \log_y x$$
$$\log_y z = 4 + \log_x z$$
$$C^{y}_{r+y} = \log_x z + \log_z z$$

onde C^{p}_{m} representa a combinação de **m** elementos tomados **p** a **p** e $\log_c B$ representa o logaritmo de **B** na base **c**.

Solução:

$C^{r}_{r+y} = \log_y x$ (I) $\quad \log_y z = 4 + \log_x z$ (II) $\quad C^{y}_{r+y} = \log_x z + \log_z z$ (III)

Fazendo (II) – (III): $\log_y z - C^{y}_{r+y} = 3 \Rightarrow C^{y}_{r+y} = \log_y z - 3$ (IV)

Note que $C^{y}_{r+y} = C^{r}_{r+y}$ (binomiais complementares), logo substituindo (IV) em (I):

$$\log_y x = \log_y z - 3 \Rightarrow \log_y x = \log_y \left(z / y^3\right) \Leftrightarrow x = \frac{z}{y^3}$$

Substituindo $z = xy^3$ em (II): $\log_y\left(xy^3\right) = 4 + \log_x\left(xy^3\right) \Rightarrow 3 + \log_y x = 4 + 1 + 3\log_x y \Rightarrow -2 = 3\log_x y - \log_y x \Rightarrow$

$3.(\log_x y)^2 + 2.(\log_x y) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_x y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ ou $\log_x y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = y^3, x^2 = z$ e $y^6 = z$.

Considerando $x = y^3$, então $C^{r}_{r+y} = 3$, isto é, r + y = 3 e r =1, logo y = 2, ou r + y = 3 e r = 2, logo y = 1.

Se y = 2, então x = 8 e Z = 64, porém, se y = 1, então x = 1 e z = 1, que é um absurdo.

Considerando $x^{-1} = y$, então $C^{r}_{r+y} = -1$ (absurdo)

Portanto a solução é x = 8, y = 2 e z = 64

6ª Questão

Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica $(\text{sen } x + \cos x)(\text{sen}^2 x - \text{sen } x \cos x + \cos^2 x) = 1$.
Determine os valores destes ângulos (em radianos).

1ª Solução:

Se os ângulos de um triângulo estão em PA então estes são da forma $\frac{\pi}{3} - A$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + A$, onde A é a razão da PA.

Fazendo uma troca de variável, ou seja, chamando senx + cosx = y, temos que (– senx.cosx) = $\frac{1-y^2}{2}$, Substituindo na equação dada, obtém-se: $y\left(1+\frac{1-y^2}{2}\right) = 1 \Rightarrow -y^3 + 3y - 2 = 0$

Note que como a soma dos coeficientes é zero, então uma das raízes é 1. Utilizando Briot-Ruffini, temos $-y^2 - y + 2 = 0$, que resolvida dá as outras raízes que são – 2 e 1.

Se y = 1, então senx + cosx = 1, porém, senx + cosx = $\sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$, logo, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ é a única possibilidade. Se y = – 2, então senx + cosx = – 2, ou seja, $\sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -2$ (Impossível)

Como x é ângulo de um triângulo então a única possibilidade é $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, os ângulos do triângulo são $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$.

2ª Solução:

Desenvolvendo a equação trigonométrica encontramos $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$.
Claramente sen x = 1 e cos x = 0 ou sen x = 0 e cos x = 1 são soluções da equação. Destas, apenas sen x = 1 e cos x = 0 satisfaz o fato de x ser ângulo de um triângulo. Assim, $x = \pi/2$ é solução.
Se 0 < sen x < 1 e 0 < cos x < 1 então $1 = \text{sen}^3 x + \cos^3 x < \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, que é uma contradição.
Logo, $x = \pi/2$, implicando que os ângulos do triângulo são $\pi/6$, $\pi/3$ e $\pi/2$.

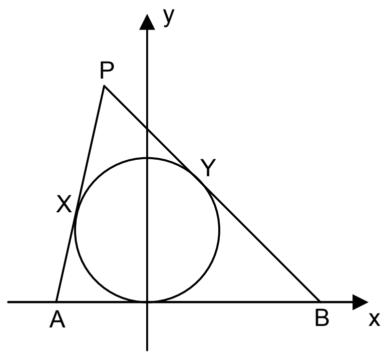
7ª Questão

Considere os pontos A(–1,0) e B(2,0) e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

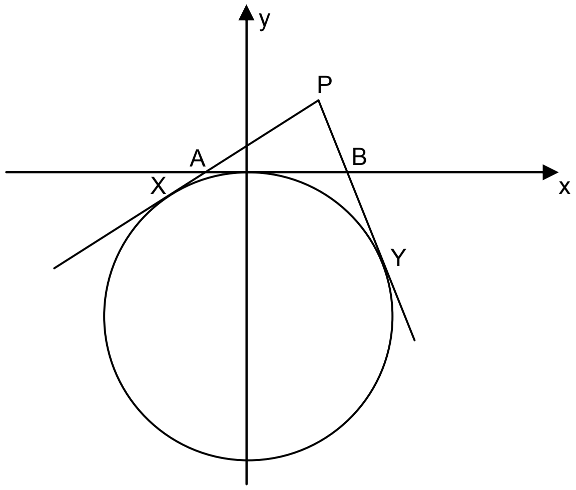
Solução:

$r_1 \cap r_2 = \{P\}$, $r_1 \cap C = X$ e $r_2 \cap C = Y$. Tem-se que:
PX = PY, AX = AO = 1, BY = BO= 2. Podem ocorrer dois casos:

(I) C está inscrita no triângulo PAB



(II) C está ex-inscrita ao triângulo PAB



Em qualquer caso:
$|PB - PA| = |(PY \pm YB) - (PX \pm XA)| = |\pm 2 - (\pm 1)| = 1$.

Portanto, P descreve uma hipérbole de focos A e B e eixo real 2a = 1. Assim, o eixo focal é 2c= 2 – (– 1) = 3, do que o eixo imaginário é 2b = $2\sqrt{2}$. O centro é o ponto médio de $\overline{AB}$: (1/2,0).

Deste modo, a equação do lugar geométrico de P é: $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{2})^2}\right) = 1 \Leftrightarrow 8x^2 - y^2 - 8x = 0$

8ª Questão

Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento **a** e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de **a**, calcule:

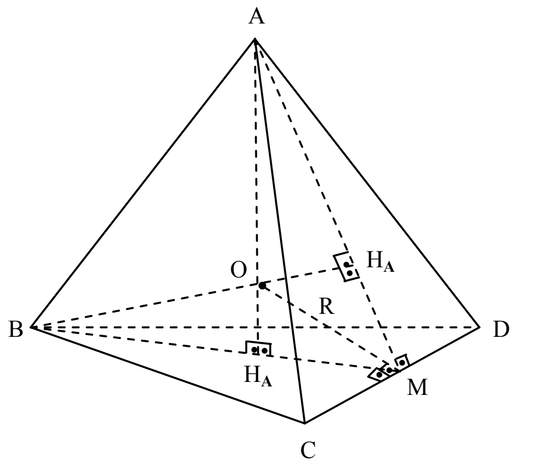
a) o volume total da esfera;

b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

Solução:

Sejam ABCD o Tetraedro regular de aresta a e M o ponto médio de $\overline{CD}$. Conforme é fácil verificar, o ortocentro do triângulo ABM, O, eqüidista das arestas do tetraedro.

De fato, já que O divide as alturas na razão 1:3, sendo H_A e H_B os centros das faces BCD e ACD, respectivamente:



$$MH_A = \frac{1}{3}.BM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$OH_A = \frac{1}{4}.AH_A = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

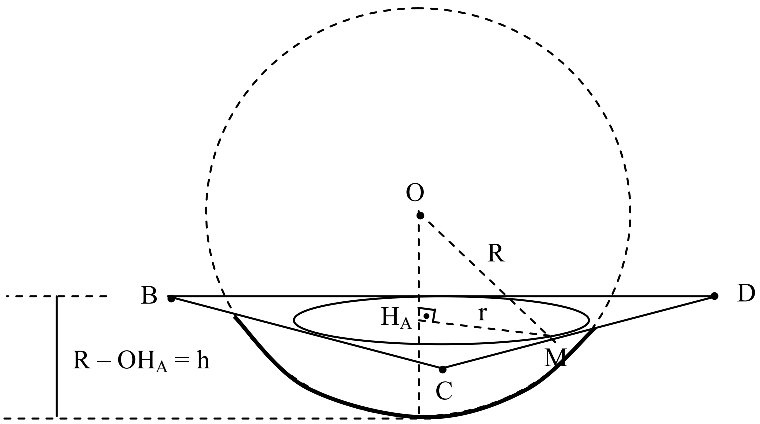
$$OM = \sqrt{OH_A^2 + MH_A^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = R,$$

Uma vez que $\overleftrightarrow{CD} \perp (A,B,M)$, (Plano do triângulo ABM) tem –se que $\overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{CD}$, pois $\overleftrightarrow{OM} \subset (A,B,M)$.

a) O volume da esfera de centro em O e de raio R= $\overline{OM}$, que tangencia todas as arestas, é.

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 \to V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}$$

b) Cada face do tetraedro secciona a esfera do item anterior criando um <u>segmento esférico</u> na esfera, exterior ao tetraedro, como indica a figura a seguir, que ressalta um dos segmentos esféricos, de altura $R - OH_A$ e de raio da base MH_A.



$$R - OH_A = h = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad r = MH_A = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Como se sabe, o volume de um segmento esférico de uma base, com altura h e raio da (Única) Base igual a r é:

$$V_1 = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right) = \frac{\pi}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).\left\{3\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left[\frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]^2\right\} \Rightarrow V_1 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{432}$$

Portanto, o volume da parte da esfera no interior do tetraedro é, devido à simetria:

$$V = V - 4V_1 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24} - \frac{\pi a^3\sqrt{2}\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{108} \Rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(8\sqrt{3} - 9)}{216}$$

9ª Questão

Determine o conjunto solução $S = \{(x, y) \mid x \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ da equação $(x + y)\,k = xy$, sabendo que **k** é um número primo.

Solução:

Observe que: $(x + y)k = xy \Rightarrow xk + yk = xy \Rightarrow xy - xk - yk = 0 \Rightarrow xy - xk - yk + k^2 = k^2 \Rightarrow$
$x(y - k) - k(y - k) = k^2 \Rightarrow (x - k)(y - k) = k^2$

Como k é primo, então temos as seguintes possibilidades:

i) $\begin{cases} x-k=k \\ y-k=k \end{cases} \Rightarrow x = 2k$ e $y = 2k$

ii) $\begin{cases} x-k=-k \\ y-k=-k \end{cases} \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$

iii) $\begin{cases} x-k=k^2 \\ y-k=1 \end{cases} \Rightarrow x = k^2 + k$ e $y = k + 1$

iv) $\begin{cases} x-k=-k^2 \\ y-k=-1 \end{cases} \Rightarrow x = -k^2 + k$ e $y = k + 1$

v) $\begin{cases} x-k=1 \\ y-k=k^2 \end{cases} \Rightarrow x = k + 1$ e $y = k^2 + k$

vi) $\begin{cases} x-k=-1 \\ y-k=-k^2 \end{cases} \Rightarrow x = k + 1$ e $y = -k^2 + k$

10ª Questão

Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:

$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$

$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de **n**, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número **r**.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

Solução:

Inicialmente podemos observar que $1+\text{cis}\frac{2\pi}{3} = \text{cis}\frac{\pi}{3}$, ou seja, $\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \left(\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{3}$.

Por outro lado:

$$\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) + \binom{n}{2}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3 + \binom{n}{4}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^4 + \binom{n}{5}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^5 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n \Rightarrow$$

$$\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) + \binom{n}{2}\left(\text{cis}\frac{4\pi}{3}\right) + \binom{n}{3}(\text{cis}2\pi) + \binom{n}{4}\left(\text{cis}\frac{8\pi}{3}\right) + \binom{n}{5}\left(\text{cis}\frac{10\pi}{3}\right) + \ldots + \binom{n}{n}\left(\text{cis}\frac{2n\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) + \binom{n}{2}\left(\text{cis}\frac{4\pi}{3}\right) + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) + \binom{n}{5}\left(\text{cis}\frac{4\pi}{3}\right) + \ldots + \binom{n}{n}\left(\text{cis}\frac{2n\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{3[n/3]}\right] + \left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{3[(n-1)/3]+1}\right] + \left(\text{cis}\frac{4\pi}{3}\right)\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{3[(n-1)/3]+2}\right]$$

Como $\text{cis}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\text{cis}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{3}$ então:

$$\cos\frac{n\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{3} = \left[\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{4} - \frac{1}{2}\binom{n}{5} + \ldots\right] + \frac{\sqrt{3}.i}{2}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots\right] \Rightarrow$$

$$\cos\frac{n\pi}{3} = \binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{4} - \frac{1}{2}\binom{n}{5} + \ldots \text{ e } \text{sen}\frac{n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots\right]$$

Sabendo-se que $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$ e $2\cos\frac{n\pi}{3} = 2\binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} - \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots$ temos que

$$2^n + 2.\cos\frac{n\pi}{3} = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots + \binom{n}{3[n/3]}\right] \Rightarrow S_0 = \frac{2^n + 2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$$

Por outro lado como $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\frac{n\pi}{3} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots$ então

$$2^n + \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\frac{n\pi}{3} = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \ldots = S_0 + 2S_1 = \frac{2^n + 2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3} + 2S_1 \Rightarrow$$

$$2S_1 = \frac{2^{n+1} + 2\sqrt{3}.\text{sen}\frac{n\pi}{3} - 2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3} = \frac{2^{n+1} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2}.\cos\frac{n\pi}{3}\right)}{3} = \frac{2^{n+1} + 4.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}{3} \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{2^n + 2.\text{sen}\frac{(2n-1)\pi}{6}}{3} = \frac{2^n + 2.\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3}$$