

**MATEMÁTICA**

**1ª Questão**

Dada a função  $f(x) = \left( \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} \right)$ , demonstre que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

**Solução Ideal:**

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{1}{2} \left( 156^{x+y} + \frac{1}{156^{x+y}} + 156^{x-y} + \frac{1}{156^{x-y}} \right) = \frac{1}{2} \left( 156^x \cdot 156^y + \frac{1}{156^x \cdot 156^y} + \frac{156^x}{156^y} + \frac{156^y}{156^x} \right) \Rightarrow$$

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{1}{2} \left( 156^x \left( 156^y + \frac{1}{156^y} \right) + \frac{1}{156^x} \left( 156^y + \frac{1}{156^y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \left( 156^x + \frac{1}{156^x} \right) \left( 156^y + \frac{1}{156^y} \right) \right) \Rightarrow$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \left( \frac{156^x + \frac{1}{156^x}}{2} \right) \left( \frac{156^y + \frac{1}{156^y}}{2} \right) \Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

**2ª Questão**

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Teclado numérico

**Solução Ideal:**

Se o 1º e 4º dígitos forem iguais a zero (1 possibilidade de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 3ª linha (9 possibilidades de escolha).

Se o 1º e 4º dígitos estiverem na 3ª linha (9 possibilidades de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 2ª linha (9 possibilidades de escolha).

Se o 1º e 4º dígitos estiverem na 2ª linha (9 possibilidades de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 1ª linha (9 possibilidades de escolha).

Deste modo, o total de possibilidades é:  $1.9 + 9.9 + 9.9 = 171$

**3ª Questão**

Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números reais positivos e diferentes de 1. sabendo que  $\log_a d, \log_b d$  e  $\log_c d$  são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que:

$$c^2 = (ac)^{\log_a d}$$

**Solução Ideal:**

Condição de três termos em PA:  $2 \cdot \log_b d = \log_a d + \log_c d \Rightarrow \frac{2}{\log_d b} = \frac{1}{\log_d a} + \frac{1}{\log_d c} \Rightarrow$

$$2(\log_d a)(\log_d c) = (\log_d b)(\log_d a + \log_d c) \Rightarrow \log_d c^2 = \frac{\log_d b}{\log_d a} (\log_d ac) \Rightarrow \log_d c^2 = (\log_a b)(\log_d ac) \Rightarrow$$

$$\log_d c^2 = \log_d (ac)^{\log_a b} \Rightarrow c^2 = (ac)^{\log_a b}$$

**Obs:** Lamenta-se o fato de a expressão que o enunciado pede para ser demonstrada estar incorreta. Em uma prova como esta, em que o tempo é determinante para o grau de nervosismo do aluno, perder tempo refazendo uma questão com enunciado incorreto é inadmissível para um vestibular do status que ostenta o IME.

**4ª Questão**

Determine o valor das raízes comuns das equações  $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$  e  $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$ .

**MATEMÁTICA**

**Solução Ideal:**

Pelo teorema das raízes racionais, como os coeficientes da equação  $x^4 - 2x^3 - 11x + 18x + 18 = 0$  são todos inteiros, as possíveis raízes racionais dessa equação são os inteiros do conjunto  $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$ . Por inspeção, verifica-se facilmente que as raízes racionais da primeira equação dada são 3 e -3. Assim, o primeiro membro da equação é divisível por  $x^2 - 9$ , ou seja:

$x^4 - 2x^3 - 11x + 18x + 18 = (x^2 - 9)(x^2 - 2x - 2)$ , cujas raízes são 3, -3,  $1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$ . Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, é fácil concluir que nenhum destes valores é raiz da segunda equação. Portanto, as equações não possuem raízes comuns.

**5ª Questão**

Resolva a equação  $2 \sin 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = 0$ .

**Solução Ideal:**

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(3x) = -\sin(11x) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 3x + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin(3x) = \sin(-11x) \Rightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-11x)$$

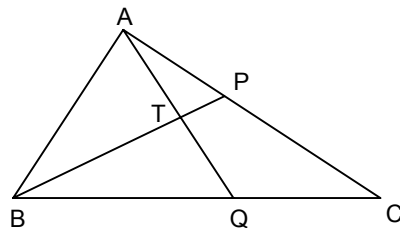
i)  $3x - 11x + \frac{\pi}{6} = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow -8x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{48} - k \cdot \frac{\pi}{4}$

ii)  $3x + \frac{\pi}{6} = -11x + k \cdot 2\pi \Rightarrow 14x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7}$

Assim:  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{48} - \frac{k \cdot \pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

**6ª Questão**

Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que  $\overline{PA} / \overline{PC} = q$ , e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que  $\overline{QB} / \overline{QC} = r$ . As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



**Solução**

Inicialmente notemos que:  $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = r \Rightarrow \frac{\overline{QB} + \overline{QC}}{\overline{QC}} = r + 1 \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}} = r + 1 \Rightarrow \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{r + 1} \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{r}{r + 1}$

Analogamente, podemos mostrar que  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{q}{q + 1}$ .

Como  $\Delta AQC$  e  $\Delta ABC$  possuem mesma altura com relação ao vértice A, então a razão de suas áreas é a razão das bases:

$$\frac{S_{\Delta AQC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{r + 1} \Rightarrow S_{\Delta AQC} = \frac{S}{r + 1}$$

Aplicando o Teorema de Menelaus com relação ao triângulo  $\Delta AQC$  e à transversal BP:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{TQ}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BQ}} = 1 \Rightarrow q \cdot \frac{\overline{TQ}}{\overline{TA}} \cdot \frac{r + 1}{r} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{TQ}}{\overline{TA}} = \frac{r}{q(r + 1)} \Rightarrow \frac{\overline{TQ} + \overline{TA}}{\overline{TA}} = \frac{r + qr + q}{q(r + 1)} \Rightarrow \frac{\overline{AQ}}{\overline{AT}} = \frac{r + q + qr}{q(r + 1)}$$

Como  $S_{\Delta ATP} = \frac{\overline{AT} \cdot \overline{AP} \cdot \sin(\angle TAP)}{2}$ ,  $S_{\Delta AQC} = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\angle QAC)}{2}$  e  $\angle TAP = \angle QAC$  então:

$$\frac{S_{\Delta ATP}}{S_{\Delta AQC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{q(r + 1)}{r + q + qr} \cdot \frac{q}{q + 1} \Rightarrow S_{\Delta ATP} = \frac{S}{(r + 1)(r + q + qr)(q + 1)} \Rightarrow S_{\Delta ATP} = \frac{S \cdot q^2}{(q + 1)(r + q + qr)}$$

**7ª Questão**

Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes  $\overline{MF}$  e  $\overline{MF'}$ , que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma  $(\overline{MF} / \overline{FP}) + (\overline{MF'} / \overline{F'P'})$  é constante.

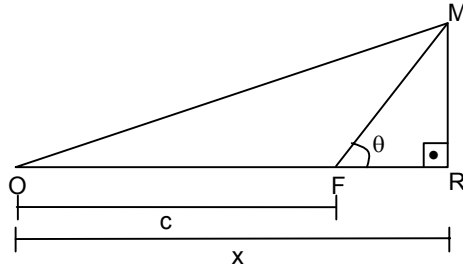
**MATEMÁTICA**

Sugestão: Calcule inicialmente a soma  $(1/\overline{MF}) + (1/\overline{FP})$ .

**Solução Ideal:**

Pode-se escolher sem perda de generalidade o eixo OX para o eixo focal e a origem do sistema cartesiano coincidente com o centro da elipse.

Considere ainda a figura abaixo, onde R é a projeção ortogonal de M sobre o eixo OX, o ângulo  $\theta$  formado pelo raio focal MF e o eixo das abscissas e x é a abscissa de M.



Suponha-se  $\theta$  agudo. Sendo MF e MF', dois raios focais, tais que  $MF + MF' = 2a$ , onde  $2a$  é a medida do eixo maior e  $MF = \rho_1$  e  $MF' = \rho_2$ , pode-se escrever:  $\rho_1 = a - ex$  (e: excentricidade) e  $\rho_2 = a + ex$ .

Da figura acima, tem-se  $OR = OF + FR \Rightarrow x = c + FR$ , onde  $FR = \rho_1 \cos \theta$ , logo  $x = c + \rho_1 \cos \theta$   
Substituindo:

$$\rho_1 = a - ex \Rightarrow \rho_1 = a - e(c + \rho_1 \cos \theta)$$

$$\rho_1(1 + e \cos \theta) = \frac{b^2}{a}, \text{ em que } b^2 = a^2 - c^2 \text{ e } \frac{b^2}{a} \text{ chamamos de parâmetro } p, \text{ logo } \rho_1 = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Para  $FP = \rho_1'$ , trocamos  $\theta$  por  $\pi + \theta$ , logo:  $\rho_1' = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$

$$S = \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{FP + MF}{MF \cdot FP} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} = \frac{1 + e \cos \theta}{p} + \frac{1 - e \cos \theta}{p} \Rightarrow S = \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{2}{p} = \frac{2a}{b^2} \text{ (constante)}$$

Observe que:  $\frac{1}{FP} = \frac{2}{p} - \frac{1}{MF} \Rightarrow \frac{MF}{FP} = \frac{2MF}{p} - 1$ . Analogamente:  $\frac{MF'}{F'P'} = \frac{2MF'}{p} - 1$ .

Somando estas duas igualdades obtemos  $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2}{p}(MF + MF') - 2$  e como  $MF + MF' = 2a$ , então

$$\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2a^2}{b^2} - 2, \text{ ou seja, } \frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} \text{ é constante.}$$

Para os casos em que  $\theta$  é reto ou obtuso, a demonstração é análoga.

**8ª Questão**

Sejam a, b e c as raízes do polinômio  $p(x) = x^3 + rx - t$ , onde r e t são números reais não nulos.

a) Determine o valor da expressão  $a^3 + b^3 + c^3$  em função de r e t.

b) Demonstre que  $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$  para todo número natural  $n \geq 2$ , onde  $S^k = a^k + b^k + c^k$  para qualquer número natural k.

**Solução Ideal:**

a) Como  $t \neq 0$ , tem-se que  $a \cdot b \cdot c \neq 0$ . Assim, nenhum dos valores, a, b ou c é nulo.

Se a, b e c são as raízes de  $p(x) = x^3 + rx - t$  então

$$\begin{cases} a^3 + r \cdot a - t = 0 \\ b^3 + r \cdot b - t = 0 \\ c^3 + r \cdot c - t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Somando estas equações temos que:  $a^3 + b^3 + c^3 + r(a + b + c) = 3t$

Como a soma das raízes de  $p(x) = x^3 + rx - t$  é zero, então  $a^3 + b^3 + c^3 = 3t$

b) Se multiplicarmos a 1ª equação de (1) por  $a^{n-2}$ , a 2ª equação por  $b^{n-2}$  e a 3ª por  $c^{n-2}$  temos que:

$$\begin{cases} a^{n+1} + r \cdot a^{n-1} - t \cdot a^{n-2} = 0 \\ b^{n+1} + r \cdot b^{n-1} - t \cdot b^{n-2} = 0 \\ c^{n+1} + r \cdot c^{n-1} - t \cdot c^{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow (a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) + r(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - t(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) = 0$$

Assim, temos que  $S^{n+1} + r \cdot S^{n-1} - t \cdot S^{n-2} = 0$

**9ª Questão**

**MATEMÁTICA**

Calcule o determinante da matriz  $n \times n$  em função de  $b$ , onde  $b$  é um número real tal que  $b^2 \neq 1$ .

$$\begin{pmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} n \text{ linhas}$$

$n$  colunas

**Solução Ideal:**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b^2+1 \end{vmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace na 1ª coluna obteremos:

$$\Delta_n = (b^2+1)\Delta_{n-1} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b^2+1 \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente Laplace na 1ª linha, temos:  $\Delta_n = (b^2+1)\Delta_{n-1} - b^2\Delta_{n-2}$   
 O que nos dá uma recorrência de 2ª ordem, cuja equação característica é dada por:  $x^2 - (b^2+1)x + b^2 = 0$ , de raízes reais distintas  $b^2$  e  $1$ . Desta forma, a solução da recorrência assume a forma:  $\Delta_n = c_1 b^{2n} + c_2 \cdot 1^n$ , em que  $c_1$  e  $c_2$  são números reais. Além disso, é imediato que  $\Delta_1 = b^2 + 1$  e que  $\Delta_2 = b^4 + b^2 + 1$ .

Para encontrarmos  $c_1$  e  $c_2$  substituímos em  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ .

$$\begin{cases} \Delta_1 = b^2 + 1 = c_1 b^2 + c_2 & x(-b^2) \\ \Delta_2 = b^4 + b^2 + 1 = c_1 b^4 + c_2 & \downarrow \end{cases}$$

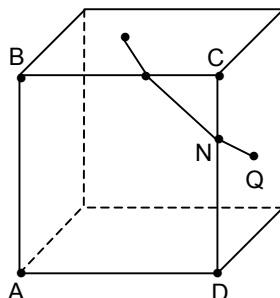
Subtraindo obtemos:  $(1 - b^2) c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{1 - b^2}$

Logo  $c_1 = \frac{-b^2}{1 - b^2}$ , assim o determinante é dado por:  $\Delta_n = \frac{b^{2(n+1)}}{b^2 - 1} - \frac{1}{b^2 - 1} \Rightarrow \Delta_n = \frac{b^{2(n+1)} - 1}{b^2 - 1}$

**10ª Questão**

Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta  $\overline{BC}$  em M e a aresta  $\overline{CD}$  em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

- a) Demonstre que  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{AC}$ .
- b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{BM} = b$ .

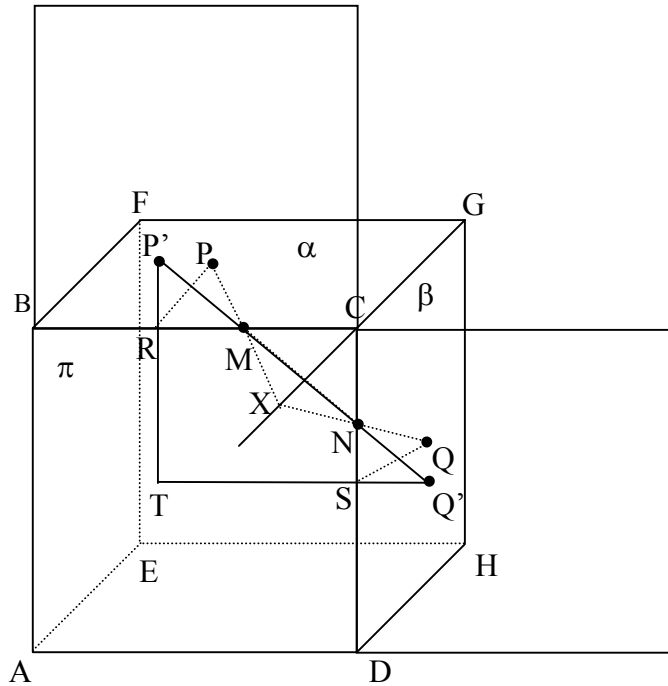


**Solução Ideal:**

Considere-se a figura abaixo, representando o cubo e os pontos em questão. Sejam, ainda:  $\alpha$  o semiplano da face superior, de origem BC e que contém P;  $\beta$  o semiplano da face lateral direita, de origem em CD e que contém Q; e  $\pi$  o plano frontal, que contém MN.

**MATEMÁTICA**

Efetuada uma rotação de  $90^\circ$  de  $\beta$  em torno de CD, de tal forma que se obtenha o semiplano oposto a  $\pi$  e, em seguida, rotacionando  $\alpha$  em torno de BC, faz-se com que os pontos correspondentes a Q e a P transformem-se, respectivamente, nos pontos Q' e P', coplanares em  $\pi$ .



a) Inicialmente, percebe-se que a condição necessária e suficiente para que os pontos P, Q, M e N sejam coplanares é que as retas PM e QN intersectem-se num ponto X, *sobre a reta* CG. Formam-se, desse modo, pares de triângulos congruentes e retângulos PRM e P'RM, bem como QNS e Q'NS.

Sejam  $PM = x$ ,  $\angle MPR = \angle MP'R = \theta$ ,  $MX = y$ ,  $NX = w$  e  $NQ = z$ .

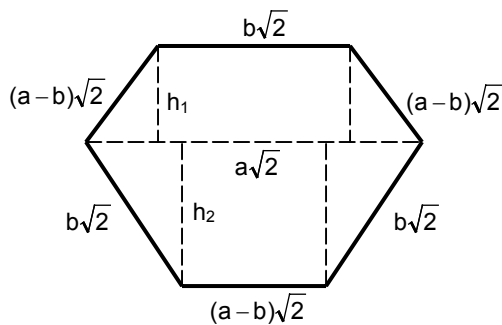
Assim,  $RM = x \text{ sen}\theta$ ,  $RP' = x \text{ cos}\theta$ ,  $MC = y \text{ sen}\theta$ ,  $XC = y \text{ cos}\theta = w \text{ sen}\theta$  (\*),  $NC = w \text{ cos}\theta$ ,  $NS = z \text{ cos}\theta$  e  $SQ' = z \text{ sen}\theta$ .

Finalmente, para que  $PM + MN + NQ$  (percurso da formiga) =  $P'M + MN + NQ'$  seja mínimo, deve-se impor que os três segmentos estejam alinhados (sobre o plano da face ABCD). Dessa forma, no triângulo retângulo P'Q'T, deve-se impor

$$\text{que: } \text{tg}\theta = \frac{TQ'}{PT'} = \frac{RM + MC + SQ'}{P'R + RT} = \frac{(x + y + z)\text{sen}\theta}{(x + w + z)\text{cos}\theta} \Leftrightarrow y = w$$

Portanto, na equação (\*),  $\text{sen}\theta = \text{cos}\theta$  e  $\theta = 45^\circ$ . Daí, MN deve ser perpendicular à diagonal AC.

b) Observando os triângulos retângulos isósceles que surgem devido ao corte pelo plano, temos o seguinte hexágono:



Aplicando o Teorema de Pitágoras:  $h_1 = \frac{(a-b)\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$  e  $h_2 = \frac{b\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$ .

Assim, a área da seção é:

$$S = \left( (a-b)\sqrt{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{b\sqrt{2}(a-b)\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{(b\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} + (a-b)\sqrt{2}b\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab)\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}b(a-b) + \frac{b^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 - 2ab + 4ab - 4b^2 + b^2) \Rightarrow$$

$$S = \frac{\sqrt{3}(a^2 - 2b^2 + 2ab)}{2}$$

**Solução Ideal - IME 2004/2005 - Matemática**

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do **Ideal Militar**

**Equipe de Matemática**

Prof. Marcelo Rufino  
Prof. Márcio Pinheiro  
Prof. Jefferson França  
Prof. Alexandre Sampaio  
Prof. Manoel Leite Carneiro

**Coordenadores**

Marcelo Rufino  
Marcos Flexa

**Digitação**

Leila Valéria da Silva