1ª Questão

Calcule o número natural ***n*** que torna o determinante abaixo igual a **5**.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Solução Ideal:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n^2-1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \log_2(n-1)^2(n+1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} =$$

$= \log_2(n-1) + \log_2[(n-1)^2(n+1)] = \log_2[(n-1)^3(n+1)] = 5 \Leftrightarrow (n-1)^3(n+1) = 32$

Como n é inteiro, então n – 1 e n + 1 devem ser potências de 2, implicando que a única fatoração possível seja:

$$\begin{cases} (n-1)^3 = 2^3 \\ n+1 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow n = 3$$

2ª Questão

Considere o polinômio $\mathbf{P(x) = x^3 + ax + b}$ de coeficientes reais, com $\mathbf{b \neq 0}$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $\mathbf{a < 0}$.

Solução Ideal:

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes, podemos escrever as relações de Girard:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (I) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ (II) $x_1x_2x_3 = -b$ (III)

Como $b \neq 0$ então nenhum dos valores x_1, x_2 e x_3 é nulo.

Elevando ao quadrado (I), temos: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2a$

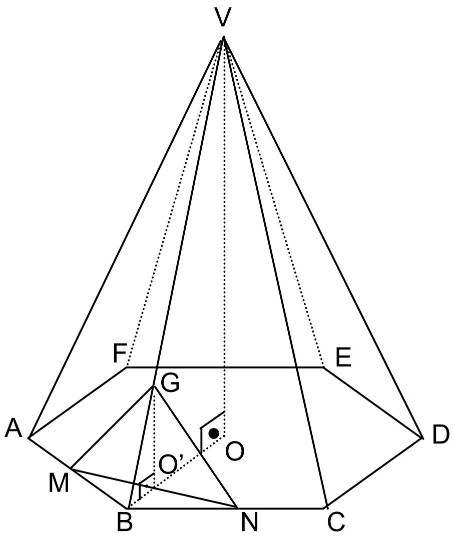
Perceba que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, para quaisquer x_1, x_2 e x_3 reais não nulos, logo $a < 0$.

Obs: Esta questão não é nada original. Está no conhecido livro “Problems in Elementary Mathematics”, de V. Lidsky, editora MIR, problema 256, página 41. Já foi utilizada também na 2ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática de 1992, questão 1.

3ª Questão

Considere uma pirâmide regular de altura ***h***, cuja base é um hexágono ***ABCDEF*** de lado ***a***. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas ***AB*** e ***BC*** divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

Solução Ideal:



Pelo ponto O’, médio de MN, seja a perpendicular ao plano do hexágono, O’G, com G na aresta BV (uma vez que GO’ // VO). Assim, o plano MNG é perpendicular ao plano do hexágono, por conter uma reta perpendicular à base. Nesta situação, a pirâmide fica dividida em dois poliedros: um tetraedro, BMNG, de volume **v**, e um outro sólido, de vértices MAFEDCNGV, o qual será visto como a diferença entre a pirâmide original e o tetraedro obtido, cujo volume será **V**.

O volume da pirâmide hexagonal é dado por: $V_0 = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$.

Agora, resta calcular o volume do tetraedro. Para tanto, considerar-se-á sua base como sendo o triângulo BMN, isósceles (BM = BN = a/2). A área de tal triângulo é igual a: $S_{BMN} = \frac{1}{2}.BM.BN.sen120^\circ = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

A altura do tetraedro, O’G, pode ser calculada a partir da semelhança entre os triângulos BO’G e BOV: $\frac{O'G}{OV} = \frac{O'B}{OB}$ (I). Mas, ainda no triângulo BMN, BO’ é altura relativa à base, MN, além de bissectar o ângulo interno $\hat{B}$. Logo, no triângulo BO’N: cos 60º = BO’/BN $\Rightarrow$ BO’ = a/4.

Por conseguinte, da equação (I): O’G = h/4, lembrando que OB = a.

Desta forma: $v = \frac{1}{3}.S_{BMN}.O'G = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{16}.\frac{h}{4} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4.16.3}$.

Finalmente, a razão entre os volumes dos poliedros obtidos é: $\dfrac{V}{v} = \dfrac{V_0 - v}{v} = \dfrac{V_0}{v} - 1 = \dfrac{\frac{a^2h\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2h\sqrt{3}}{4.16.3}} - 1 = 96 - 1 \iff \dfrac{V}{v} = 95$

4ª Questão

Calcule **sen (x + y)** em função de ***a*** e ***b***, sabendo que o produto **ab ≠ 0**, que **sen x + sen y = a** e que **cos x + cos y = b**.

Solução Ideal:

Utilizando fatoração de expressões trigonométricas:

sen x + sen y = a $\Rightarrow$ $2\,\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = a$ (I)

cos x + cos y = b $\Rightarrow$ $2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = b \Rightarrow \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{b}{2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$ (II)

Substituindo (II) em (I): $a = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\dfrac{b}{2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \text{tg}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

Sabendo que $\text{sen}(x+y) = \dfrac{2.\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \dfrac{\frac{2a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

5ª Questão

Seja uma função **f: ℜ - {0} → ℜ**, onde ℜ representa o conjunto dos números reais, tal que **f(a/b) = f(a) - f(b)** para **a** e **b** pertencentes ao domínio de **f**. Demonstre que **f** é uma função par.

Solução Ideal:

Fazendo a = b : f(1) = f(a) - f(a) $\Rightarrow$ f(1) = 0. Fazendo a = 1 = -b, então: f(-1) = f(1) - f(-1) $\Rightarrow$ f(-1) = 0
Finalmente, para a = x = -b, com x real não nulo qualquer:

$f\left(\dfrac{x}{-x}\right) = f(x) - f(-x) \Rightarrow f(x) - f(-x) = f(-1) = 0 \iff f(-x) = f(x), \forall x \in \Re - \{0\} \iff$ f é par

Obs: Uma questão quase idêntica a esta caiu no vestibular do ITA do ano passado. Compare os enunciados:
"(ITA-2003) Mostre que toda função f : IR - {0} → IR, satisfazendo f(xy) = f(x) + f(y) em todo seu domínio, é par."
Observe que na verdade é a mesma questão, pois se fizermos x = a/b e y = b temos que f(xy) = f(x) + f(y) fica da forma f(a) = f(a/b) + f(b) $\Rightarrow$ f(a/b) = f(a) – f(b).

6ª Questão

Sendo **a, b** e **c** números naturais em progressão aritmética e **z** um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números **a, b, c** e **z** de forma que eles satisfaçam a igualdade: $\dfrac{1}{z^a} + \dfrac{1}{z^b} + \dfrac{1}{z^c} = z^9$.

Solução Ideal:

Seja r a razão da PA. Assim, temos que: a = b – r e c = b + r.

Como o módulo de z é 1, então $z.\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$. Seja θ o argumento de z, isto é, z = cos θ + i.sen θ.
Assim:

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c} = z^{-a}+z^{-b}+z^{-c} = (\bar{z})^a+(\bar{z})^b+(\bar{z})^c = \cos(a\theta)-i.\text{sen}(a\theta)+\cos(b\theta)-i.\text{sen}(b\theta)+\cos(c\theta)-i.\text{sen}(c\theta) = \cos(9\theta)+i.\text{sen}(9\theta)$$

Portanto, temos que:

i) cos (aθ) + cos (bθ) + cos (cθ) = cos (9θ) $\Rightarrow$ cos (b – r)θ + cos (bθ) + cos (b + r)θ = cos (9θ) $\Rightarrow$

$$2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(b-r)\theta + 2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(b\theta) + 2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(b+r)\theta = 2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(9\theta) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(b-\frac{r}{2}\right)\theta - \text{sen}\left(b-\frac{3r}{2}\right)\theta + \text{sen}\left(b+\frac{r}{2}\right)\theta - \text{sen}\left(b-\frac{r}{2}\right)\theta + \text{sen}\left(b+\frac{3r}{2}\right)\theta - \text{sen}\left(b+\frac{r}{2}\right)\theta = 2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(9\theta) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(b+\frac{3r}{2}\right)\theta - \text{sen}\left(b-\frac{3r}{2}\right)\theta = 2\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(9\theta) \Rightarrow \text{sen}\frac{3r}{2}\theta.\cos(b\theta) = \text{sen}\frac{r\theta}{2}.\cos(9\theta) \quad (1)$$

ii) sen (aθ) + sen (bθ) + sen (cθ) = - sen (9θ)

Fazendo cálculos análogos ao item i), temos que $\text{sen}\frac{3r}{2}\theta.\text{sen}(b\theta) = -\text{sen}\frac{r\theta}{2}.\text{sen}(9\theta)$ (2)

Uma solução possível para as equações (1) e (2) é $\theta = \frac{\pi}{18}$, b = 9 e r = 9. Assim: a = 0, b = 9, c = 18 e $z = \cos\frac{\pi}{18} + i.\text{sen}\frac{\pi}{18}$.

Obs: Esta questão admite infinitas soluções triviais. Por exemplo, se fizermos z = - 1, qualquer progressão aritmética (de números naturais) em que o primeiro termo seja ímpar e a razão seja ímpar satisfaz o enunciado.

7ª Questão

Considere a parábola **P** de equação $\mathbf{y = ax^2}$, com **a > 0** e um ponto **A** de coordenadas $\mathbf{(x_0, y_0)}$ satisfazendo a $\mathbf{y_0 < a\,x_0^2}$. Seja **S** a área do triângulo **ATT'**, onde **T** e **T'** são os pontos de contato das tangentes a **P** passando por **A**.
a) Calcule o valor da área **S** em função de **a,** $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y_0}$.
b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto **A**, admitindo que a área **S** seja constante.
c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

Solução Ideal:

Seja $y - y_0 = m(x - x_0)$, a equação da reta tangente à parábola, onde m = 2ax (derivada de $y = ax^2$).
Assim: $ax^2 - y_0 = 2ax(x - x_0) \Rightarrow ax^2 - 2ax_0x + y_0 = 0$, cujas raízes são $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

Assim, $x_1 + x_2 = 2ax_0$ $\quad x_1x_2 = \frac{y_0}{a} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$

a) A área S é dada por: $S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \end{vmatrix}\right| \Rightarrow 2S = \left|x_0ax_1^2 + x_2y_0 + x_1ax_2^2 - ax_1^2x_2 - y_0x_1 - x_0ax_2^2\right| \Rightarrow$

$$2S = \left|-x_0a(x_2^2 - x_1^2) + y_0(x_2 - x_1) + ax_1x_2(x_2 - x_1)\right| \Rightarrow 2S = \left|(x_2 - x_1)[y_0 + ax_1x_2 - x_0a(x_2 + x_1)]\right|$$

Substituindo as relações de x_1 e x_2.

$$S = \left|\frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(y_0 - ax_0^2)\right| \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(ax_0^2 - y_0)$$

b) Desenvolvendo a expressão de S:

$$S = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(ax_0^2 - y_0) \Rightarrow \frac{S^2a^2}{4} = a(ax_0^2 - y_0)(ax_0^2 - y_0)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}} = ax_0^2 - y_0 \Rightarrow y_0 = ax_0^2 - \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}$$

c) Colocando na forma canônica: $x_0^2 = \frac{1}{a}\left(y_0 + \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}\right)$. Desta forma, a cônica representada acima é uma parábola de vértice $\left(0, -\sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}\right)$, eixo de simetria x = 0, parâmetro $\frac{1}{2a}$, foco em $\left(0, \frac{1}{4a} - \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}\right)$ e reta diretriz $y = -\frac{1}{4a} - \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}$.

8ª Questão

Demonstre que o número $\underbrace{111...1}_{(n-1)\text{ vezes}}\underbrace{222...2}_{n\text{ vezes}}5$ é um quadrado perfeito.

1ª Solução Ideal:

Note que: $N = \underbrace{111...1}_{n-1}\underbrace{222...2}_{n}5 = \underbrace{111...11}_{2n} + \underbrace{111...11}_{n+1} + 3 = \underbrace{111...11}_{2n} + \underbrace{111...11}_{n+1} + 3$

Repare agora que: $\underbrace{111...11}_{m} = \frac{\overbrace{999...99}^{m}}{9} = \frac{10^m - 1}{9}$

Assim: $N = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 3 = \frac{10^{2n} - 1 + 10^{n+1} - 1 + 27}{9} = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9}$

Podemos arrumar os termos de N da seguinte forma: $N = \frac{(10^n)^2 + 2.5.10^n + 5^2}{3^2} = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2$

Perceba que $10^n + 5$ é divisível por 3, uma vez que a soma dos seus dígitos é igual a 6, implicando que N é o quadrado perfeito de um inteiro.

2ª Solução Ideal

Note que: $25 = 5^2 = \left(\dfrac{10+5}{3}\right)^2$, $1225 = 35^2 = \left(\dfrac{10^2+5}{3}\right)^2$, $112225 = 335^2 = \left(\dfrac{10^3+5}{3}\right)^2$, ...

Vamos provar por indução que $\underbrace{111...1}_{n-1}\underbrace{1222...22}_{n}5 = (\underbrace{333...33}_{n-1}5)^2$.

Para n = 1 temos que 25 = 5^2.

Suponhamos que exista um inteiro positivo k tal que $\underbrace{111...1}_{k-1}\underbrace{1222...22}_{k}5 = (\underbrace{333...33}_{k-1}5)^2$.

Perceba que: $\underbrace{111...1}_{k}\underbrace{1222...22}_{k+1}5 = \underbrace{111...1}_{k-1}\underbrace{1222...22}_{k}5 + 11.10^{2k} + 10^{k+1} = (\underbrace{333...33}_{k-1}5)^2 + 11.10^{2k} + 10.10^k = .$

$$= \left(\frac{10^k+5}{3}\right)^2 + 11.10^{2k} + 10.10^k = \frac{10^{2k} + 10.10^k + 25 + 99.10^{2k} + 90.10^k}{9} = \frac{10^{2k+2} + 10.10^{k+1} + 25}{9} = \left(\frac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2 = (\underbrace{333...33}_{k}5)^2$$

9ª Questão

Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de **35 pontos**. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia **3 pontos**, cada empate valia **1 ponto** e que derrotas não pontuavam.

Solução Ideal:

Seja n o número de times do campeonato. Como cada equipe jogou contra cada outra exatamente uma vez, então o número de jogos disputados é igual a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. O valor máximo de pontos corresponde quando todos os jogos terminam com vitória de um dos times e o valor mínimo de pontos corresponde quando todos os jogos terminaram empatados.

Assim: $2.\dfrac{n(n-1)}{2} \le 35 \le 3.\dfrac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 2n(n-1) \le 70 \le 3n(n-1) \quad (1)$

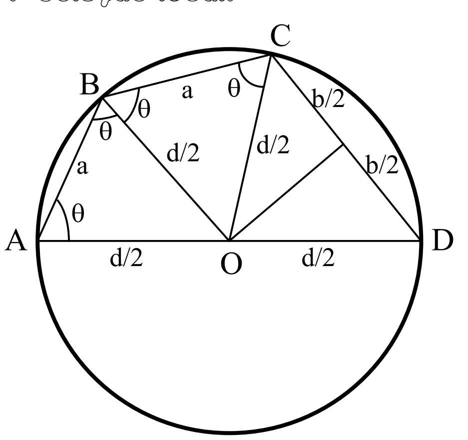
Como n é inteiro positivo, resolvendo a inequação $2n(n-1) \le 70$, encontramos que $1 \le n \le 6$.
Analogamente, resolvendo $3n(n-1) \ge 70$ (n inteiro positivo) encontramos que $n \ge 6$.
Portanto, concluímos que a única solução inteira positiva para a equação (1) é n = 6, implicando que foram disputados $\binom{6}{2}$ = 15 jogos no torneio.

Como a diferença de pontos entre um jogo que não terminou empatado e outro que terminou empatado é 1, então o número N de jogos que terminaram empatados é igual à diferença entre o número máximo teórico de pontos e a quantidade real de pontos ao final do torneio. Assim: $N = 3\binom{6}{2} - 35 = 45 - 35 = 10$ jogos empatados.

10ª Questão

Um quadrilátero convexo **ABCD** está inscrito em um círculo de diâmetro ***d***. Sabe-se que $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{a}$, $\overline{\mathbf{AD}} = \mathbf{d}$ e $\overline{\mathbf{CD}} = \mathbf{b}$, com **a, b** e **d** diferentes de zero.
a) Demonstre que $\mathbf{d^2 = bd + 2a^2}$.
b) Se **a, b** e **d** são números inteiros e **a** é diferente de **b**, mostre que **d** não pode ser primo.

1ª Solução Ideal:



a) Seja O o centro da circunferência circunscrita a ABCD. Assim, temos que OA = OD = OB = OC = d/2 = raio da circunferência circunscrita a ABCD.
Como os triângulos OAB e OBC são congruentes e isósceles então temos que $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \theta$.
Observando o triângulo isósceles ΔOAB temos que:

$$\cos\theta = \frac{AB/2}{AO} = \frac{a/2}{d/2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a}{d}.$$

Perceba que:
$\angle COD = 180^o - (\angle AOB + \angle BOC) = 180^o - (180^o - 2\theta + 180^o - 2\theta) = 4\theta - 180^o$.
No triângulo COD, traçando a altura relativa a CD, temos que:

$$\text{sen}\,(2\theta - 90^o) = \frac{b/2}{d/2} \quad \Rightarrow \quad -\cos 2\theta = \frac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad -2.\cos^2\theta + 1 = \frac{b}{d} \quad \Rightarrow$$

$$-2\frac{a^2}{d^2} + 1 = \frac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad -2a^2 + d^2 = b.d \quad \Rightarrow \quad d^2 = bd + 2a^2$$

b) Inicialmente, suponhamos que d = 2: $4 = 2b + 2a^2 \Rightarrow b + a^2 = 2$.
Como b e a são inteiros positivos, então deveríamos ter a = b = 1, que não é permitido pelo enunciado.

Suponhamos agora que d é um primo ímpar. Como $d(d - b) = 2a^2$ e mdc (d, 2) = 1, então temos que d divide a, fazendo com que $|a| \geq |d|$. Como a e d são positivos então $a \geq d$ (1).
Entretanto, como d é o diâmetro da circunferência e a é uma corda, devemos ter a < d, que está em desacordo com a inequação (1). Deste modo, concluímos que d não é primo.

2ª Solução Ideal (item a)

Pelo Teorema de Pitágoras temos que: $BD = \sqrt{d^2 - a^2}$ e $AC = \sqrt{d^2 - b^2}$.

Pelo Teorema de Hiparco: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{BC.CD + AB.AD}{AB.BC + AD.CD} \Rightarrow \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{a.b + a.d}{a^2 + b.d} \Rightarrow \dfrac{a.b + a.d}{AC} = \dfrac{a^2 + b.d}{BD}$ (1)

Pelo Teorema de Ptolomeu: $AC.BD = BC.AD + AB.CD \Rightarrow AC.BD = a.d + a.b \Rightarrow \dfrac{a.d + a.b}{AC} = BD$ (2)

Igualando (1) e (2) obtemos que: $BD^2 = a^2 + b.d \Rightarrow d^2 - a^2 = a^2 + b.d \Rightarrow d^2 = b.d + 2a^2$

Solução Ideal – IME 2004 – Matemática

Este gabarito foi totalmente elaborado pela equipe de professores de Matemática do Ideal Militar

Equipe de Matemática	Coordenadores	Digitação
Prof. Marcelo Rufino	Marcelo Rufino	Sueli Santos
Prof. Márcio Pinheiro	Marcos Flexa	
Prof. Jefferson França		
Prof. Alexandre Sampaio		