Resolução de Matemática – IME 2002/2003

1ª Questão:

Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

Solução:

Seja z = cos θ + i.sen θ; $z.\bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$

Portanto:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{z^{-n}+z^n} = \frac{1}{(\bar{z})^n + z^n}$$

$$= \frac{1}{\cos(-n\theta) + i.\text{sen}(-n\theta) + \cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)} =$$

$$= \frac{1}{\cos(n\theta) - i.\text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2.\cos(n\theta)}$$

que é um número real.

Obs: Esta questão é quase idêntica a 2ª questão da prova do ITA de 1980: "Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se n é um número inteiro positivo, $z^n + 1/z^n$ é igual a:"

2ª Questão:

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:

$|\log(12x^3 - 19x^2 + 8x)| = \log(12x^3 - 19x^2 + 8x)$,

onde log (y) e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y .

Solução:

fazendo $x = \log(12x^3 - 19x^2 + 8x)$ temos que $|x| = x$ se somente se $\mathbf{x \geq 0}$. Assim, $\log(12x^3 - 19x^2 + 8x) \geq 0$.

Aplicando a definição de log, tem-se:

$12x^3 - 19x^2 + 8x \geq 1 \Rightarrow 12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 \geq 0$

Por inspeção vemos que 1 é raiz

	12	-19	8	-1
1	12	-7	1	0

Portanto: $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = (x-1)(12x^2 - 7x + 1)$

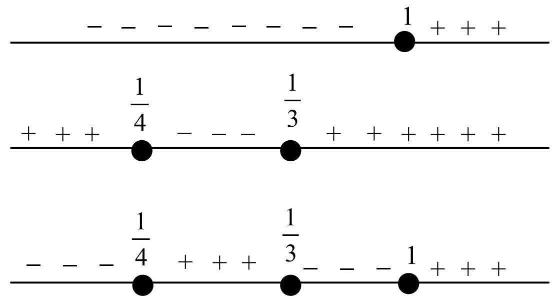
O discriminante de $12x^2 - 7x + 1$ é:

$\Delta = 49 - 4(12) . 1 = 1$

Desta forma, suas raízes são:

$$x = \frac{7 \pm 1}{24} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Assim, as raízes de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ são 1, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

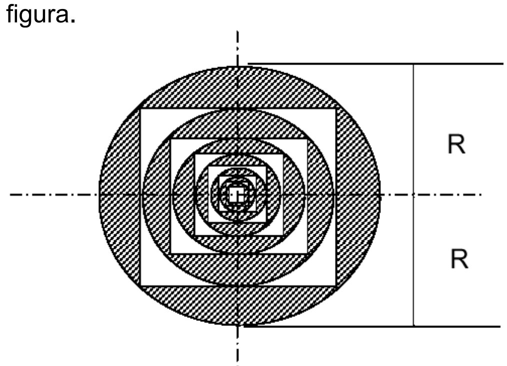


$x \in IR \,/\, x \geq 1$ ou $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Repare que estes valores satisfazem a condição de existência do logaritmo, uma vez que se $12x^3 - 19x^2 + 8x \geq 1$ então necessariamente temos $12x^3 - 19x^2 + 8x > 0$.

3ª Questão:

Dada numa circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.



Solução:

$$S_1 = \pi R^2 - 2R^2 = R^2(\pi - 2)$$

$$S_2 = \pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) - R^2 = \frac{\pi R^2.\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2} - R^2$$

$$S_2 = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = R^2\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$$

$$S_3 = \frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{2R^2}{4}$$

$$S_3 = R^2\left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$$

Observa-se que as áreas formarão uma progressão geométrica infinita geométrica infinita com razão $1/2$, cuja soma será: $S_T = \dfrac{R^2(\pi-2)}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2(\pi - 2)R^2$

4ª Questão:

Resolva a equação tg α + tg (2α) = 2.tg (3α), sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

1ª Solução:

Notemos inicialmente que $\alpha \neq \pi/6$ e $\alpha \neq \pi/4$.
Portanto, podemos afirmar que

$$\text{tg}(3\alpha) = \text{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(2\alpha)}{1 - \text{tg}(\alpha).\text{tg}(2\alpha)}.$$

Assim: $\text{tg}(3\alpha) = \dfrac{2.\text{tg}(3\alpha)}{1 - \text{tg}(\alpha).\text{tg}(2\alpha)} \Rightarrow$

$\text{tg}(3\alpha)[1 - \text{tg}(\alpha).\text{tg}(2\alpha)] = 2.\text{tg}(3\alpha) \Rightarrow$
$\text{tg}(3\alpha)[1 + \text{tg}(\alpha).\text{tg}(2\alpha)] = 0$

i) se $\text{tg}(3\alpha) \neq 0 \Rightarrow \text{tg}(\alpha).\text{tg}(2\alpha) = -1 \Rightarrow$

$\dfrac{2.\text{tg}^2(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)} = -1 \Rightarrow 2.\text{tg}^2(\alpha) = -1 + \text{tg}^2(\alpha) \Rightarrow$

$\text{tg}^2(\alpha) = -1$ que não possui solução real.

ii) $\text{tg}(3\alpha) = 0 \Rightarrow 3\alpha = k.\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{k.\pi}{3}$

Como $\alpha \in [0, \pi/2)$ então $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/3$

2ª Solução:

$$\text{tg}(3\alpha) = \text{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}2\alpha}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{tg}\alpha + \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}}{1 - \text{tg}\alpha . \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}} = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha + 2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha - 2\text{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\,\alpha + \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{6\text{tg}\,\alpha - 2\text{tg}^3\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha + 2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{6\text{tg}\alpha - 2\text{tg}^3\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{6\text{tg}\alpha - 2\text{tg}^3\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$3\text{tg}\alpha - 9\text{tg}^3\alpha - \text{tg}^3\alpha + 3\text{tg}^5\alpha =$
$= 6\text{tg}\alpha - 6\text{tg}^3\alpha - 2\text{tg}^3\alpha + 2\text{tg}^5\alpha \Rightarrow$
$\text{tg}^5\alpha - 2\text{tg}^3\alpha - 3\text{tg}\alpha = 0 \Rightarrow$
$\text{tg}\alpha\,(\text{tg}^4\alpha - 2\text{tg}^2\alpha - 3) = 0 \Rightarrow$
$\text{tg}\,\alpha\,(\text{tg}^2\,\alpha - 3)(\text{tg}^2\,\alpha + 1) = 0$

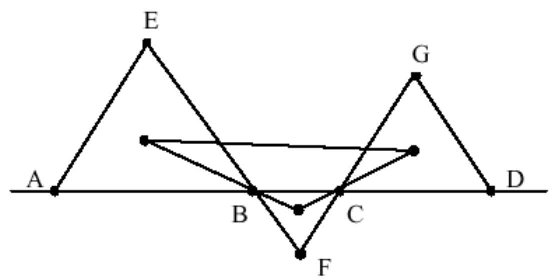
i) $\text{tg}\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

ii) $\text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{3}$. Como $\alpha \in$ 1º quadrante então o único valor que satisfaz é $\alpha = \pi/3$.

iii) $\text{tg}^2\,\alpha = -1$ não possui solução real.

5ª Questão:

Sobre uma reta *r* são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



Solução:

Sejam AB = a, BC = b, CD = c, G_1 o baricentro de ΔABE, G_2 o baricentro de ΔBCF e G_3 o baricentro de ΔCDG. Como a distância do baricentro ao vértice de um triângulo equilátero é igual a 2/3 da altura, então

$BG_1 = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Analogamente

$BG_2 = CG_2 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ e $CG_3 = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Perceba também que, como o triângulo ΔBCF é equilátero, então $\angle BG_2C = 120^o$.

Assim, a área de $\Delta G_1G_2G_3$ é:

$$S = \frac{G_1G_2.G_2G_3.\text{sen}(120^o)}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{b\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{b\sqrt{3}}{3} + \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}(a+b)(b+c)}{12}$$

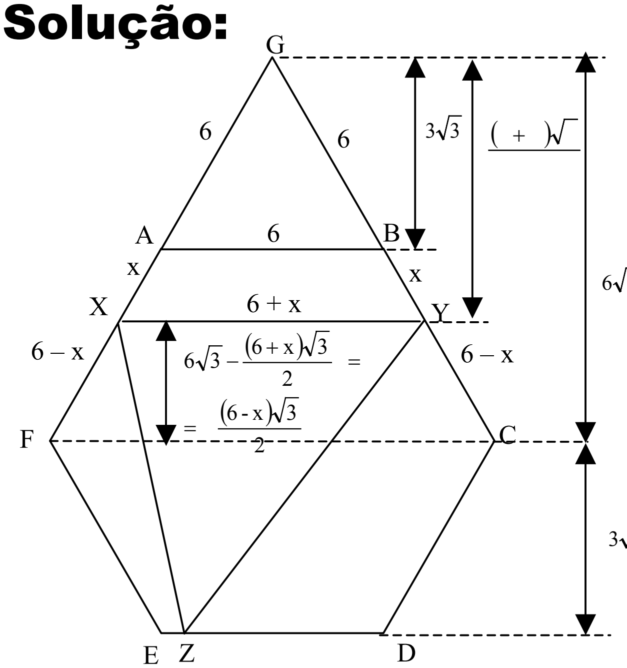
6ª Questão:

Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que:

a) os pontos X,Y e Z estão situados sobre lados do hexágono;

b) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

Solução:



Seja AX = BY = x.

Os prolongamentos de $\overline{AF}$ e $\overline{BC}$ cortam-se em G, definindo um Δ equilátero ABG, de lado 6cm.

A fim de maximizar a área do ΔXYZ, deve-se impor que Z $\in \overline{DE}$, para que a distância de Z a XY seja máxima.

A área de XYZ em função de x fica:

$$S = \frac{(6+x)\left[\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}\right]}{2} = \frac{(6+x)(12-x)\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(72 + 6x - x^2\right)$$

que realmente admite um valor máximo, obtido para

$$x_{max} = -\frac{6}{2.(-1)} = 3\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad S_{max} = \frac{81\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

7ª Questão:

Sejam A e B dois subconjuntos de IN. Por definição, uma função f: A $\rightarrow$ B é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in$ A.

a) Para A = {1, 2} e B = {1, 2, 3, 4}, quantas funções de A para B são crescentes.

b) Para A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, ..., n}, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

1ª Solução:

a) se f(1) = 1 então temos 4 possibilidades para f(2);
se f(1) = 2 então temos 3 possibilidades para f(2);
se f(1) = 3 então temos 2 possibilidades para f(2);
se f(1) = 4 então temos 1 possibilidade para f(2);
Assim, existem 1 + 2 + 3 + 4 = 10 funções crescentes de A para B.

b) Suponhamos que f(1) = k, onde $1 \leq k \leq n$.
Deste modo, os valores que f(2) e f(3) podem assumir pertencem ao conjunto {k, k + 1, k + 2, ..., n}.
Utilizando o raciocínio do item a), para cada k existem 1 + 2 + 3 + ... + n – k + 1 = $\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$ possibilidades para a escolha de f(2) e f(3) de forma que $f(3) \geq f(2)$.
Assim, o total de funções crescentes é:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2 - k(2n+3) + n^2 + 3n + 2}{2} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}k^2 - (2n+3)\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}(n^2+3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+3)\frac{n(n+1)}{2} + n(n^2+3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^3 - 15n^2 - 9n + 6n^3 + 18n^2 + 12n}{12} =$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

2ª Solução:

a) A quantidade de tais funções é igual ao número de pares (f(1), f(2)), com f(2) ≥ f(1) e {f(1), f(2)} ∈ {1, 2, 3, 4}. Se f(1) e f(2) forem distintos temos $\binom{4}{2} = 6$ possibilidades. Se f(1) e f(2) forem iguais temos 4 possibilidades. Assim, o total é 6 + 4 = 10.

b) Pelas condições do problema temos f(3) ≥ f(2) ≥ f(1). Vamos construir a função g: {1, 2, 3} → {1, 2, ..., n + 3} de modo que g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 e g(3) = f(3) + 2. Assim, para g temos g(3) > g(2) > g(1), ou seja, g é estritamente crescente. Uma vez que depois de selecionados três elementos distintos de {1, 2, ..., n + 2} existe somente uma forma de colocarmos em ordem estritamente crescente, então a quantidade de funções g estritamente crescentes é igual a quantidade de formas de escolhermos três elementos distintos de {1, 2, ..., n + 2}. Portanto, existem $\binom{n+2}{3}$ funções estritamente crescentes g. Como para cada função g existe somente uma função f, então existem $\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ funções f crescentes.

3ª Solução:

a) Sejam a = f(1) – 1, b = f(2) – f(1) e c = 4 – f(2). Somando estas equações temos que a + b + c = 3, com a ≥ 0, b ≥ 0 e c ≥ 0. Perceba agora que depois de escolhidos os valores de a, b e c os valores de f(1) e f(2) estão unicamente determinados. Em outras palavras, o número de funções f crescentes é igual ao número de solução naturais de a + b + c = 3. Fazendo x = a + 1, y = b + 1 e z = c + 1 temos que x – 1 + y – 1 + z – 1 = 3 ⇒ x + y + z = 6, com x ≥ 1, y ≥ 1 e z ≥ 1. Escreva o último sistema da seguinte maneira:
x + y + z = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
Note que a quantidade de tais solução é igual ao número de maneiras de colocar duas barras nos cinco espaços entre os 1's. Assim, existem $\binom{5}{2} = 10$ solução inteiras positivas para x + y + z = 6, fazendo com que existam 10 funções f crescentes.

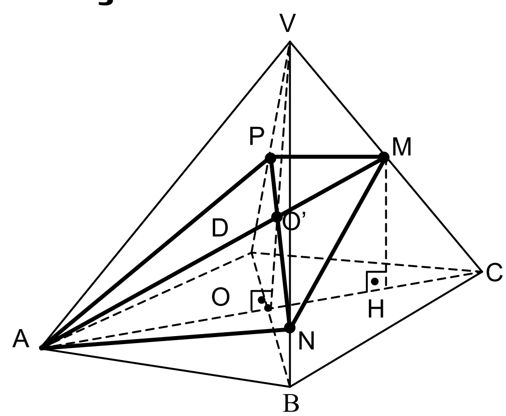
b) Utilizando o mesmo raciocínio anterior, sejam:
a = f(1) – 1, b = f(2) – f(1), c = f(3) – f(2) e d = n – f(3). Somando temos que a + b + c + d = n – 1, com a > 0, b > 0, c > 0 e d > 0. Fazendo x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1 e w = d + 1 temos x – 1 + y – 1 + z – 1 + w – 1 = n – 1 ⇒ x + y + z + w = n + 3, onde x, y, z, w ≥ 1. Para este sistema temos $\binom{n+2}{3}$ soluções inteiras positivas, ou seja, existem $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ funções f crescentes.

Obs: Esta última solução permite generalizar o problema proposto. Assim, se A = {1, 2, ..., m} e B = {1, 2, ..., n}, pode-se provar que existem $\binom{n+m-1}{m}$ funções f crescentes de A para B.

8ª Questão:

Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular ABCD. O lado da base da pirâmide mede ℓ e a aresta lateral $\ell\sqrt{2}$. Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

Solução:



Seja S a seção procurada. A interseção do plano BDF com S deve ser uma reta paralela à $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{PN}$.
Como AVC é um plano de simetria, concluir-se que: NA = AP e PM = NM. Portanto, A seção S, representada pelo quadrilátero APMN, possui diagonais perpendiculares e sua área é igual a $\frac{AM\,.\,PN}{2}$.

Inicialmente, note-se que $\overline{AM}$ é a altura de um triângulo AVC, equilátero. Assim, $AM = \frac{\ell\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$

Agora sejam $\overline{AM} \cap \overline{PN} = \{0'\}$ e $\overline{VO}$ a altura da pirâmide no ΔAMC, retângulo em M, a altura relativa à hipotenusa, $\overline{MH}$, mede:

$$MH = \frac{AM.MC}{AC} = \frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{2}.\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$$

Além disso: $AH = \frac{AM^2}{AC} = \frac{\frac{3\ell}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{3\ell\sqrt{2}}{4}$

Da semelhança entre os triângulos AMH, segue:

$$\frac{OO'}{MH} = \frac{AO}{AH} \Rightarrow OO' = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}.\frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\ell\sqrt{2}}{4}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}$$

Finalmente, no triângulo equilátero VBD, sendo PN = x, conclui-se que:

$$\frac{\left(\ell\sqrt{2}\right).\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\ell\sqrt{2}}{3}$$

Desse modo:

$$S_{APMN} = \frac{AM \cdot PN}{2} = \frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2\ell\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{3}$$

9ª Questão:

Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

Solução:

Inicialmente note que x IR. Chamando de $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ e elevando ao cubo, tem-se:

$$x^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3.\sqrt[3]{400-392}\,.\,x \Rightarrow$$

$$x^3 = 40 + 3.2x \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x - 40 = 0$$

por inspeção observa-se 4 é raiz, daí.

	1	0	-6	-40
4	1	4	10	0

Assim: $x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$

Como o discriminante de $x^2 + 4x + 10$ é $\Delta = 16 - 4.10 = -24$ então esta equação não possui raízes reais.

Portanto, a única raiz é 4, que é múltiplo de 4.

Obs: Esta mesma questão foi aplicada na 1ª Fase da Olimpíada dos Estados Unidos de 1995.

10ª Questão:

Considere uma matriz A, n x n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k.A$, prove que a matriz A + I é invertível, onde I é a matriz identidade n x n.

1ª Solução:

Note que:

$A(A+I)(A-I) = A^3 - A = kA - A = (k-1)A \Rightarrow$

$(A+I)(1-k) + A(A+I)(A-I) = (A+I)(1-k) - (1-k)A \Rightarrow$

$(A+I)[A(A-I) + (1-k).I] = I - k.I = (1-k).I \Rightarrow$

$\det(A+I).\det[A(A-I) + (1-k).I] = \det[(1-k).I] \Rightarrow$

$\det(A+I).\det[A(A-I) + (1-k).I] = (1-k)^n$

Como $k \neq 1$ então $\det(A+I) \neq 0 \Rightarrow$ A + I é invertível.

2ª Solução:

Suponhamos que A + I não é invertível. Assim, pela teoria dos auto-valores existe uma matriz não nula nx1 X tal que $AX = (-1)X = -X$ (1)

De (I) temos que $\begin{cases} X = -AX & (2) \\ A^2X = -AX & (3) \end{cases}$

Deste modo:

$A^2X = -AX \Rightarrow A^3X = -A^2X \Rightarrow KAX = -A^2X \Rightarrow$

$k.X = A^2X$ (4)

De (2) e (3) temos k.X = X e como X é não nula então k = 1 o que é absurdo, logo $\det(A+I) \neq 0 \Rightarrow$ A + I é invertível.