

Finalmente, convém ressaltar que, quando o conjunto A for o *universo*, o complementar de B em relação a A sempre estará definido (pois qualquer conjunto é parte do universo), por isso, é freqüente dar-lhe uma notação especial: em geral, B^c , B' ou \bar{B} . Nesse caso, há uma definição especial, notando que $x \in U$ é sempre verdade, o que torna essa afirmação “redundante”. Assim:

$$C_U^B = \bar{B} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin B\} = \{x | x \notin B\}$$

Esta definição é importante, uma vez que torna possível substituir o conjunto dos elementos que não pertencem a um determinado conjunto X por \bar{X} . Além disso, as propriedades ficam mais fáceis de visualizar. As relações de de Morgan, por exemplo, ficam

$$A \cup B = \overline{A \cap B} \text{ e } A \cap B = \overline{A \cup B}$$

explicitando que a complementação transforma união em interseção e vice-versa. Outro resultado importante é a propriedade VIII anterior, que agora fica:

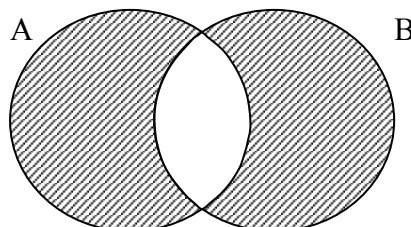
$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Portanto, a diferença entre conjuntos quaisquer pode ser encarada como uma interseção, o que permite utilizar suas propriedades.

1.6.5. DIFERENÇA SIMÉTRICA

Dados os conjuntos A e B quaisquer, denomina-se diferença simétrica entre eles o conjunto $A \Delta B$, definido por:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Exemplos:

- Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, tem-se $A \Delta B = \{1, 4, 5\}$.
- Considerando X como o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o concurso para o ITA e Y como o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o concurso para o IME, tem-se $X \Delta Y$ sendo o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o ITA, mas não o IME, bem como dos alunos da mesma turma que querem concorrer a uma vaga para o IME, mas não para o ITA. Intuitivamente, nota-se que $X \Delta Y$ pode também ser visto como o conjunto dos alunos que querem fazer o vestibular do ITA ou do IME, *mas não para os dois simultaneamente*.

Conforme discutido anteriormente (ver item 6.1), o conectivo **ou** em Matemática possui um sentido **inclusivo**, permitindo que as proposições ligadas por ele sejam simultaneamente verdadeiras. É por isso, por exemplo, que sempre $A \cap B \subset A \cup B$. Na linguagem comum, porém, o mesmo conectivo é quase sempre entendido como de sentido **exclusivo**. Assim, quando se diz que “Márcio é professor ou estudante”, comumente exclui-se a possibilidade (matematicamente aceitável) de o referido indivíduo ser tanto professor quanto estudante.

Para utilizar o sentido exclusivo do “ou”, aplica-se a duplicidade em Matemática, isto é, usa-se “**ou ... ou**”. Desse modo, quando se deseja excluir a simultaneidade, diz-se, por exemplo, que “**ou**

$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$. Lembrando que os ângulos α e β têm o mesmo co-seno se, e somente se, $\alpha = \pm \beta + 2k\pi$, em que k é um número inteiro, dever-se-ia impor que:

$\sqrt{x+T} = \pm\sqrt{x} + 2k\pi$. Quadrando:

$x + T = x + 4k^2\pi^2 \pm 2k\pi\sqrt{x}$, de que:

$T = 4k^2\pi^2 \pm 2k\pi\sqrt{x}$, o que não convém (T não pode depender de x).

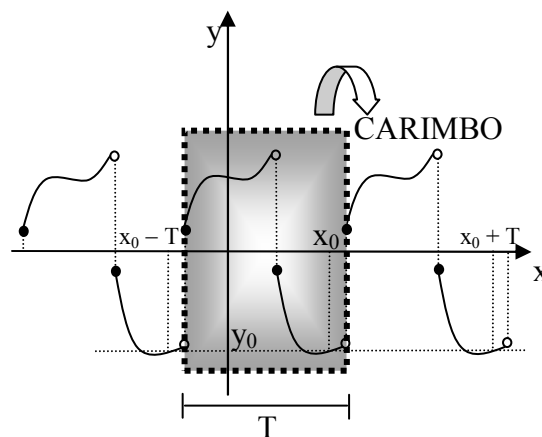
Por conseguinte, f não é periódica.

2.12.2. INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Graficamente, uma função é periódica de período T se, e somente se, seu gráfico pode ser inteiramente obtido através de translações horizontais de um trecho próprio qualquer, de comprimento T . Noutros termos: fixando uma parte “ininterrupta” (não interrompida) qualquer do gráfico de f , com comprimento (projeção do gráfico sobre o eixo x) T , todo o resto do gráfico nada mais é do que uma mera “cópia” de tal parte, podendo ser traçado a partir de translações exclusivamente horizontais do referido trecho.

Isto é uma consequência direta da definição. De fato, um ponto $(x, f(x))$ pertence ao gráfico de uma função periódica de período T se, e somente se, o ponto $(x + T, f(x + T)) = (x + T, f(x))$ também está em $G(f)$. É só notar, então, que a distancia entre tais pontos é $x + T - x = T (> 0)$. Como este raciocínio é válido para todo x do domínio de f

Para fixar idéias, pode-se usar uma metáfora bem útil. Imagine-se que seja destacada uma parte ininterrupta de $G(f)$, com comprimento T . Caso se faça um carimbo de tal parte, para obter todo o gráfico de f é suficiente carimbá-lo, lado a lado, apenas deslizando esse carimbo na horizontal.



As imagens repetem-se de T em T:

$$y_0 = f(x_0) = f(x_0 + T) = f(x_0 - T)$$

2.12.3. ALGUMAS PROPRIEDADES

I. Se $f: A \rightarrow B$ é periódica de período T , então qualquer número da forma $k.T$, com k inteiro positivo, também é um período de f .

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$. Note-se que, como é trivial, a propriedade é válida para $T=1$. Suponha-se que ela também seja válida para um inteiro positivo k , genérico, isto é, que $f(x + kT) = f(x)$, $\forall x \in A$. Daí, como T é um período de f :

$f[(x + kT) + T] = f(x)$. Mas: $f[(x + kT) + T] = f[x + (k + 1)T]$. Logo, $f[x + (k + 1)T] = f(x)$, $\forall x \in A$, ou seja, $(k + 1)T$ também é um período de f . Assim, por indução finita, a propriedade é verdadeira para qualquer valor de k inteiro e positivo.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Abaixo estão listados e demonstrados os critérios de divisibilidade mais importantes. Estes critérios compreendem apenas os casos das divisibilidades por números primos (2, 3, 5, 7, 11, ...) ou potências de primos (4, 9, 16, ...) . No caso da análise da divisibilidade de determinado inteiro por um número composto, que não seja uma potência de um primo, deve-se fatorar este número composto como a multiplicação de termos com mdc igual a 1 e aplicar os critérios por cada um destes termos. Por exemplo, para a análise da divisibilidade de um inteiro por 18, deve-se aplicar os critérios de divisibilidade por 2 e 9.

Divisibilidade por 2: um número inteiro é divisível por 2 se seu último algarismo for divisível por 2.

Demonstração:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 0) + a_0 = 10(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1) + a_0$$

Como $10(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)$ é par, N é par se e somente se a_0 (que é o algarismo das unidades de N) é par.

Divisibilidade por 3: um número inteiro é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Demonstração:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$$

$$N = (\underbrace{99 \dots 9}_n + 1) a_n + (\underbrace{99 \dots 9}_{n-1} + 1) a_{n-1} + \dots + (9 + 1) a_1 + a_0$$

$$N = \underbrace{99 \dots 9}_n a_n + \underbrace{99 \dots 9}_{n-1} a_{n-1} + \dots + 9 a_1 + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$N = 3[\underbrace{33 \dots 3}_n a_n + \underbrace{33 \dots 3}_{n-1} a_{n-1} + \dots + 3 a_1] + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$
 Como o primeiro termo é múltiplo de 3,

para que N seja múltiplo de 3 devemos ter que $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (que é a soma dos dígitos de n) seja múltiplo de 3.

Divisibilidade por 4: um número inteiro é divisível por 4 se o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Demonstração:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1} \dots a_2 00) + (a_1 a_0) = 100(a_n a_{n-1} \dots a_2) + (a_1 a_0)$$

Como $100(a_n a_{n-1} \dots a_2)$ é divisível por 4, N é divisível por 4 se e somente se $(a_1 a_0)$ (que é o número formado pelos dois últimos algarismos de N) é divisível por 4.

Divisibilidade por 5: um número inteiro é divisível por 5 se o seu último algarismo for igual a 0 ou 5.

Demonstração:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 0) + a_0$$

$$N = 10(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1) + a_0$$

Como $10(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)$ é divisível por 5, N é divisível por 5 se e somente se a_0 (que é o algarismo das unidades de N) é divisível por 5, ou seja, se é igual a 0 ou 5.

Divisibilidade por 7: um número inteiro $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 7 quando o inteiro $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \dots$ for divisível por 7.

Demonstração:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0) = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + 10^4 a_4 + 10^5 a_5 + 10^6 a_6 + 10^7 a_7 + 10^8 a_8 + 10^9 a_9 + \dots \Rightarrow$$

$$N = a_0 + (7 + 3)a_1 + (98 + 2)a_2 + (994 + 6)a_3 + (9996 + 4)a_4 + (99995 + 5)a_5 + (999999 + 1)a_6 + (9999997 + 3)a_7 + (99999998 + 2)a_8 + (999999994 + 6)a_9 + \dots \Rightarrow$$

$$N = 7[a_1 + 14a_2 + 142a_3 + 1428a_4 + 14285a_5 + 142857a_6 + 1428571a_7 + 14285714a_8 + 142857142a_9 + \dots] + a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \dots$$

Como o primeiro termo é múltiplo de 7, para que N seja múltiplo de 7 devemos ter que a expressão $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \dots$ seja múltiplo de 7.

Exercícios – MMC

1) Prove que:

- a) $\text{mdc} [\text{mmc} (a, b), a] = a$.
b) $\text{mmc} [\text{mdc} (a, b), a] = a$.

2) No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luses “piscam” com frequências diferentes. A primeira “pisca” 15 vezes por minuto e a segunda “pisca” 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?

- a) 12 b) 10 c) 20 d) 15 e) 30

3) Sabendo que $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$ e $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$, calcule $\text{mdc}(588, 936)$ e $\text{mmc}(588, 936)$.

4) Qual o mmc de dois números cujo produto é 6480, sendo o mdc igual a 36?

5) O mdc de dois números é 3 e o mmc é 1260. Se um dos números é 36, qual é o outro?

6) Da Praça da República partem, às 6 horas da manhã, dois bondes das linhas X e Y, iniciando o serviço do transporte de passageiros. Sabendo-se que o bonde X volta ao ponto de partida ao cabo de 50 minutos, e o Y, ao cabo de 45 minutos, pergunta-se a que horas os dois bondes partirão novamente juntos da praça da República?

7) Tenho três régua divididas em partes iguais. Cada parte da primeira tem 3 mm, da segunda, 5 mm, e da terceira, 12 mm. Coloco as três régua uma do lado da outra, de modo que as suas extremidades coincidam. Quais são os traços de divisão das três régua que coincidem?

8) Determine o menor inteiro que, quando dividido por 2, 3, 4, ..., 10, deixa os restos 1, 2, 3, ..., 9 respectivamente.

9) Se o mdc entre dois números é 6 e o mmc é 90, quais podem ser esses números?

10) Determinar os inteiros positivos a e b sabendo:

- a) $\text{mdc} (a, b) = 4$ e o $\text{mmc} (a, b) = 60$
b) $a + b = 589$ e $\frac{\text{mmc}(a, b)}{\text{mdc}(a, b)} = 84$

11) Demonstrar que, se a e b são inteiros positivos tais que o $\text{mdc} (a, b) = \text{mmc} (a, b)$, então $a = b$.

12) Sejam a , b e c inteiros positivos. Mostre que:

$$\text{mmc}(a, b, c) = \frac{abc \cdot \text{mdc}(a, b, c)}{\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mdc}(a, c) \cdot \text{mdc}(b, c)}$$

13) Prove que:

$$\text{mmc}(\text{mdc}(a, b), \text{mdc}(a, c)) = \text{mdc}(a, \text{mmc}(b, c)).$$

14) (UECE-2001) Dois relógios tocam uma música periodicamente, um deles a cada 60 segundos e o outro a cada 62 segundos. Se ambos tocaram (simultaneamente) às 10 horas, que horas estarão marcando os relógios quando voltarem a tocar juntos (simultaneamente) pela primeira vez após as 10 horas?

- a) 10 horas e 31 minutos c) 13 horas e 30 minutos
b) 11 horas e 02 minutos d) 17 horas

15) (UECE-2004) Seja n o menor inteiro positivo

para o qual $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}, \frac{n}{5}, \frac{n}{6}, \frac{n}{7}, \frac{n}{8}, \frac{n}{9}$ são números

inteiros. O produto dos algarismos do número n é:

- a) 0 b) 5 c) 10 d) 20

16) (UECE-2005) Sendo n um número inteiro positivo, a notação M_n designa o conjunto de todos os múltiplos positivos de n . O valor de p para $M_p = M_{18} \cap M_{24}$ é:

- a) 42 b) 54 c) 66 d) 72

17) (Unifor-99) Indica-se por $M(n)$ o conjunto dos múltiplos positivos do número inteiro n . Considere o conjunto $M(12) \cap M(15) \cap M(20)$. A soma dos três menores números desse conjunto é

- a) 240 b) 360 c) 420 d) 540 e) 680

18) (UFSC-99) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. Sejam x e y o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 15 e 18, respectivamente. Então o produto $xy = 270$.

02. Se $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, então, A é equivalente a $\{x^2 / x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < x < 7\}$.

04. Numa divisão, cujo resto não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é $(d - r)$, sendo d o divisor e r o resto.