1) Seja x um número real tal que sen x + cos x é um número racional. Demonstre, por indução, que para todo n natural, tem-se que $\text{sen}^n x + \cos^n x$ e um número racional.

2) Encontre o número de triplas ordenadas de conjuntos (A, B, C) tais que $A \cup B \cup C = \{1, 2, ..., 2007\}$ e $A \cap B \cap C = \varnothing$.

3) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ possuem exatamente uma raiz real comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também possuem exatamente uma raiz comum. Determine a soma a + b + c.

4) (IME-53/54) Dadas as três equações abaixo, elimine x e y e obtenha uma relação entre a, b e c.

$\text{sen}(x + y).\cos(x - y) = a$

$\cos(x + y).\cos(x - y) = b$

$\cos 2(x - y) = c$

5) (Escola Naval-89/90) Resolva a equação $\text{tg}^2(2x) + 2.\text{tg}(2x).\text{tg}(3x) = 1$.

6) (IME-64/65) Dada a função: $v(x) = Ax^2.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$; determine a constante A para que o valor máximo de v(x) seja igual a 1.

7) (IME-66/67) Seja 64 a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x + y)^m$, onde m é um número natural. Supondo-se que a e b números positivos, o terceiro e o sétimo termos do desenvolvimento de $(a + b)^m$ segundo as potências decrescentes de b serão $T_3 = 60$ e $T_7 = 64$. Determine a e b.

8) Doze pessoas são divididas em três grupos de quatro. Qual é a probabilidade de duas determinadas pessoas ficarem no mesmo grupo?

9) (IME-65/66) Calcule: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$, sabendo que p + 1 > 0.

10) (IME-78/79) Admita Y = {a, b, c} e seja a função $h: Y \times Y \to Y$ definida por:

h(a, a) = a	h(b, a) = b	h(c, a) = c
h(a, b) = b	h(b, b) = c	h(c, b) = a
h(a, c) = c	h(b, c) = a	h(c, c) = b

Considere uma função $f: Z \to Y$ tal que:

f(0) = a

f(1) = b

e $\forall$ n, m $\in$ Z, f(n + m) = h(f(n), f(m)).

Sabe-se que $\forall n \in Z$, f(3n) = a.

a) Determine y $\in$ Y, tal que h(y, f(52)) = f(45).

b) Encontre um $H \subset Z$, tal que f(W) = {c}.

11) Calcular o valor do determinante de ordem n: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ -1 & -1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & -1 & ... & 0 \end{vmatrix}$

12) (IME-73/74) a) Considere os conjuntos U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i}, A = {a, b, c, d, e, f, g, h}, B = {a, c, e, i}, C = {a, b, c, e, f, h, i}, D = {a, e, f, i}. Determine o único conjunto $X \subseteq U$ que satisfaz a equação $(A \cup B) \cap X = C - D$.

b) Para os mesmos conjuntos U, A e B do item anterior, calcule $Y = \complement_U(\complement_U A \cup \complement_U B)$ e $Z = (\complement_U A \cap B) \cup (A \cap \complement_U B)$.