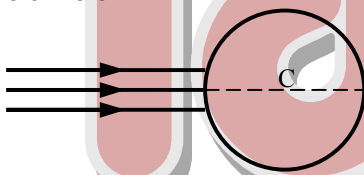


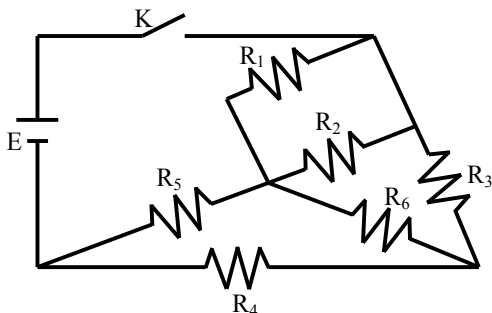
Determine:

- O trabalho do gás em cada transformação.
- A variação de energia interna entre A e D.
- A temperatura em D, sabendo-se que em C era de  $-23^\circ\text{C}$ . Dado:  $1\text{ cal} = 4,18\text{ J}$

- 7) (IME-87) Um feixe estreito de raios paralelos incide sobre uma esfera sólida de vidro, como ilustra a figura. Determine a posição final da imagem.  
Dados: índice de refração do vidro = 1,5  
raio da esfera = 3 cm



- 8) (IME-87) A figura abaixo representa um circuito resistivo, formado pelos resistores  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  e  $R_6$ , que deve ser alimentado por uma bateria de  $E$  volts. Os resistores são feitos de fios metálicos, todos de mesmo material resistivo. Os fios dos resistores  $R_1, R_2, R_4, R_5$  e  $R_6$  têm o mesmo comprimento  $\ell$ , e o fio do resistor  $R_3$  tem comprimento  $\ell/3$ . Todos os fios dos resistores, exceto o de  $R_4$ , têm a mesma seção reta, igual a  $0,5\text{ mm}^2$ . Determine a seção reta do fio do resistor  $R_4$  para que seja nula a potência dissipada no resistor  $R_6$  a partir do fechamento da chave  $K$ .



- 9) (IME-87) A tensão  $V(t)$ , definida pelo gráfico da figura 2, é aplicada ao circuito da figura 1, cujos componentes passivos ( $R$  e  $C$ ), invariantes no tempo, são definidos pelas curvas características dadas abaixo (fig. 3 e 4).

Esboce os gráficos das correntes  $i_R(t)$  e  $i_C(t)$ , em função do tempo.

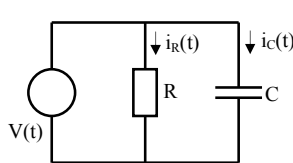


Figura 1

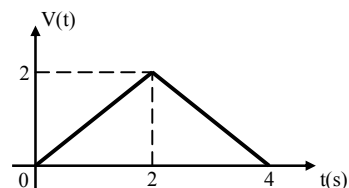


Figura 2

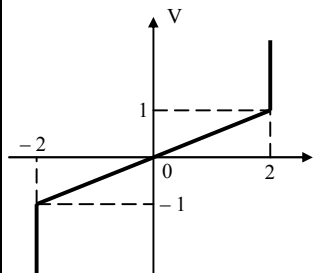


Figura 3

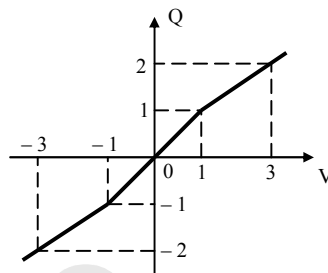
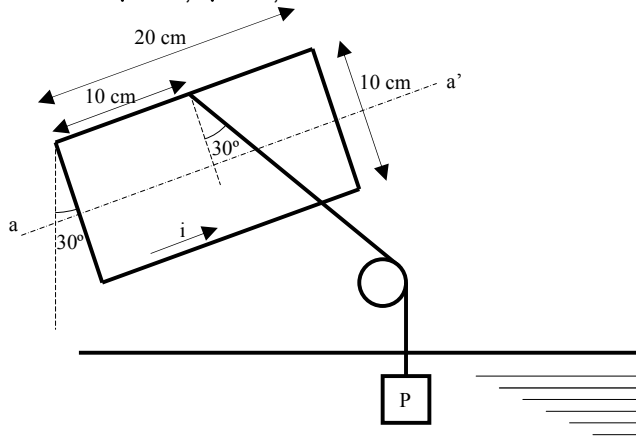
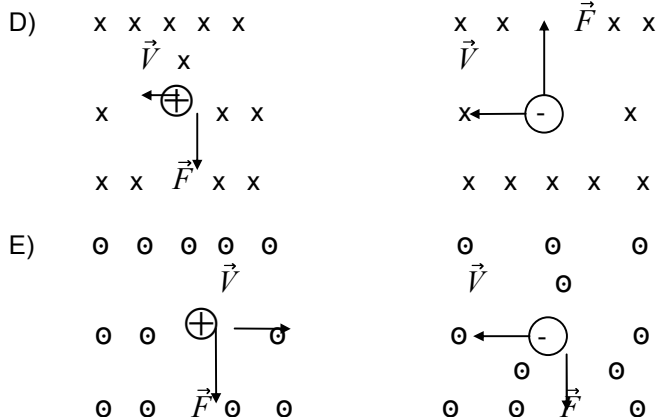


Figura 4

- 10) (IME-87) A espira condutora retangular, indeformável, mostrada na figura abaixo, conduz uma corrente  $i$  no sentido indicado e está inteiramente submetida a um campo magnético uniforme e constante, dirigido verticalmente de baixo para cima, de intensidade  $B = 0,02\text{ T}$ . A espira pode girar em torno de seu eixo de simetria  $aa'$ , disposto na horizontal. Determine o valor da corrente  $i$  que possibilite a sustentação do peso  $P = 0,173\text{ N}$ , imerso em um líquido de massa específica  $\rho = 1,73\text{ kg/m}^3$ ; sabendo-se que o plano da espira forma um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical e, simultaneamente, ângulo de  $30^\circ$  com a corda de sustentação que une a espira ao peso por meio de uma roldana simples. O peso é um cubo de  $20\text{ cm}$  de aresta. Despreze os pesos da espira e da corda de sustentação.  
Considere: aceleração da gravidade:  $g = 10\text{ m/s}^2$ ;  
 $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ;  $\sqrt{3} = 1,73$

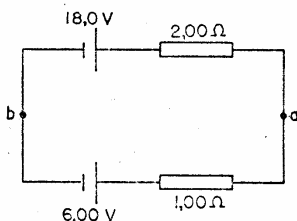




17- (ITA-82) Duas cargas elétricas puntiformes, de mesmo valor absoluto  $|q|$  e de sinais contrários estão em repouso em dois pontos A e B. Traz-se de muito longe uma terceira carga positiva, ao longo de uma trajetória que passa mais perto de B do que de A. Coloca-se essa carga num ponto C tal que ABC é um triângulo equilátero. Podemos afirmar que o trabalho necessário para trazer a terceira carga:

- A) É menor se em B estiver a carga  $|q|$  do que se em b estiver  $-|q|$
- B) É maior se em B estiver a carga  $|q|$  do que se em b estiver  $-|q|$
- C) Será independente do caminho escolhido para trazer a terceira carga e será nulo
- D) Será independente do caminho escolhido para trazer a terceira carga e será positivo
- E) Será independente do caminho escolhido para trazer a terceira carga e será negativo

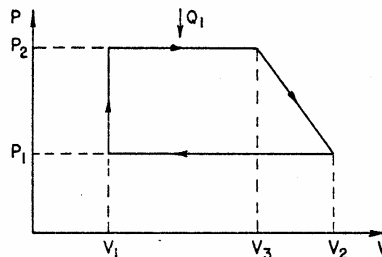
18- (ITA-82) As duas baterias da figura 11 estão ligadas em oposição. Suas f. e. m. e resistências internas são respectivamente: 18,0V e 2,00Ω. Sendo  $I$  a corrente no circuito,  $V_{ab}$  a tensão  $V_a - V_b$  e  $P_d$  a potência total dissipada, podemos afirmar que:



- A)  $i = 9,00A$ ;  $V_{ab} = -10,0V$ ;  $P_d = 12,0W$
- B)  $i = 6,00A$ ;  $V_{ab} = 10,0V$ ;  $P_d = 96,0W$
- C)  $i = 4,00A$ ;  $V_{ab} = -10,0V$ ;  $P_d = 16,0W$
- D)  $i = 4,00A$ ;  $V_{ab} = -10,0V$ ;  $P_d = 48,0W$
- E)  $i = 4,00A$ ;  $V_{ab} = 24,0V$ ;  $P_d = 32,0W$

19- (ITA-82) Certo gás é obrigado a percorrer o ciclo da figura 12, onde  $P$  representa a pressão e  $V$  o volume. Sabe-se que, ao percorre-lo o gás absorve uma

quantidade de calor  $Q_1$ . Podemos afirmar que a eficiência  $\eta$  (razão do trabalho fornecido para a energia absorvida) do ciclo é dada por:



- A)  $\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_3 + V_2 - 2V_1)}{2Q_1}$
- B)  $\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 + V_1 - 2V_3)}{2Q_1}$
- C)  $\eta = 1 - \frac{(P_2 - P_1)(V_3 + V_2 - 2V_1)}{2Q_1}$
- D)  $\eta = \frac{(P_1 - P_2)(V_3 + V_2 - 2V_1)}{2Q_1}$
- E)  $\eta = 1 + \frac{(P_2 - P_1)(V_2 + V_1)}{2Q_1}$

20- (ITA-82) Sendo  $R$  o raio da Terra, suposta esférica,  $G$  a constante da gravitação universal,  $g_1$  a aceleração da queda livre de um corpo no Equador,  $g_2$  a aceleração de queda livre no polo Norte,  $M$  a massa da Terra, podemos afirmar que:

- A)  $g_1 = G M/R^2$
- B)  $M = \frac{R^2 g_2}{G}$
- C)  $g_2$  é nula
- D)  $g_1$  é nula
- E)  $\frac{GM}{R^2} = \frac{g_1 + g_2}{2}$

**ITA 1982/1983**

01. (ITA-83) Um estudante realizou duas séries de medidas independentes, a 200C, do comprimento de uma mesa, com uma trena milímetro - trada. O resultado da primeira série de emdidias foi 1,982 m e o da segunda foi 1,984 m. Analizando os resultados constatou que na primeira série de medidas cometera o mesmo erro na técnica de leitura da escala da trena, isto é, cada medida fora registrada com 2 mm a menos. Além disto, verificou que a trena, cujo coeficiente de dilatação linear era 0,0005/0C, havia sido calibrada a 250C. Nestas condições, o valor que melhor representaria o comprimento da mesa seria:  
(A) 1,981 (B) 1,989 (C) 1,979  
(D) 1,977 (E) 1,975

e o conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , define-se em  $A$  uma relação  $R$  por:

$$a_i R a_j \Leftrightarrow m_{ij} = 1$$

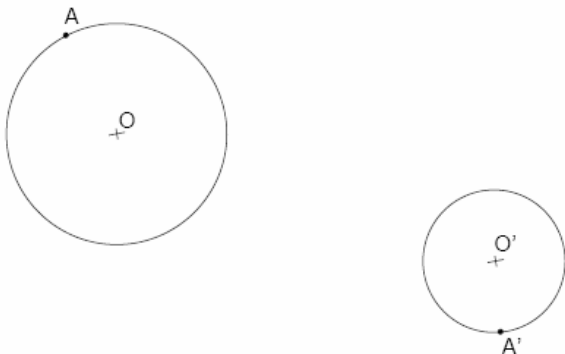
Verifique se  $R$  é uma relação de equivalência.

### Matemática II

1) (IME-84) Um triângulo equilátero  $ABC$ , de lado  $a$ , gira em torno de um eixo  $XX'$  de seu plano, passando por  $A$  sem atravessar o triângulo. Sendo  $S$  a área total da superfície gerada pelo triângulo e designado por  $\theta$  o ângulo  $X \hat{A} B$ , pede-se determinar os valores de  $\theta$  para que:

a)  $S$  seja máximo. b)  $S$  seja mínimo. c)  $S = 3\pi a^2$ .  
Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.

2) (IME-84) a) São dados dois círculos  $C(O, r)$  e  $C'(O', r')$ , um ponto fixo  $A$  sobre  $C$  e um ponto fixo  $A'$  sobre  $C'$ . Traçam-se cordas paralelas  $AB$  e  $A'B'$  nos círculos  $C$  e  $C'$ , respectivamente. Determine a direção destas cordas para que o produto  $AB \cdot A'B'$  seja máximo.



b) Dar-se um triângulo  $ABC$ . De um ponto  $P$  variável (e não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo) traçam-se retas  $PB$  e  $PC$ . Sejam  $L$  e  $M$  os pés das perpendiculares de  $A$  a estas retas. Com a variação de  $P$ , o comprimento  $LM$  também varia. Qual o comprimento máximo de  $LM$ ?

Obs: Para resolver este item não é necessário determinar a posição de  $P$ , correspondente a este máximo de  $LM$ .

3) (IME-84) Sejam  $\ell$  o lado de um polígono regular de  $n$  lados,  $r$  e  $R$ , respectivamente, os raios dos círculos inscritos e circunscritos a este polígono. Prove que

$$r + R = \frac{\ell}{2} \cot \frac{\pi}{2n}$$

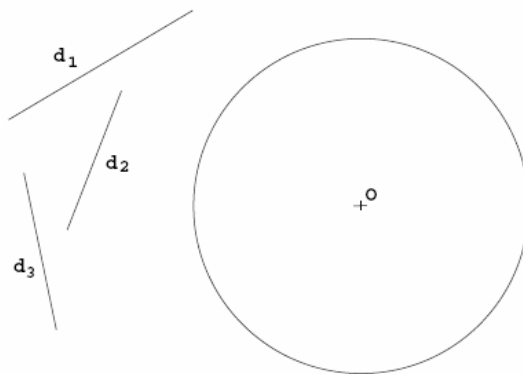
4) (IME-84) Um paralelepípedo tem a base  $ABCD$  sobre um plano horizontal e as arestas verticais são  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  e  $DD'$ . As três arestas concorrentes  $AB = a$ , sendo  $a > b > c$ . Um plano secante corta a aresta  $AB$  em seu ponto médio  $M$ , a aresta  $BB'$  no ponto  $N$ , tal que

$$\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$$

e a aresta  $B'C'$  em  $P$ , tal que  $B'P = x$ , com  $0 < x \leq b$ . Pede-se estudar a forma das seções obtidas pelo

plano secante  $m$   $MNP$  no paralelepípedo, quando a distância  $x$  varia nas condições dadas.

5) (IME-84) Dão-se um círculo  $(c)$ , de centro  $O$ , e três direções  $d_1, d_2$  e  $d_3$ . Inscreva em  $(c)$  os triângulos cujos lados  $AB, BC$  e  $CA$  têm, respectivamente, as direções  $d_1, d_2$  e  $d_3$  e cujas vértices  $A, B$  e  $C$  se sucedem no círculo  $(c)$ , no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



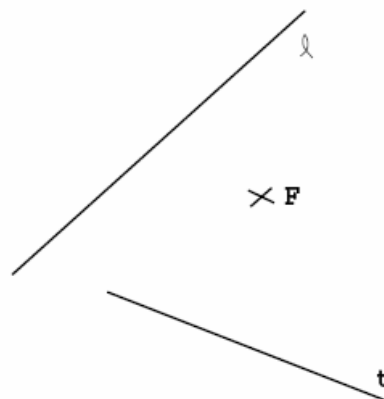
6) (IME-84) Dão-se um quadrado de vértices  $A, B, C$  e  $D$  e o seu centro  $O$ . Mostre que os incentros dos triângulos, cujos vértices são cada 3 pontos não colineares deste conjunto de 5 pontos, são vértices de um polígono regular convexo e calcule, em função do lado  $\ell$  do quadrado, o raio do círculo no qual está inscrito o polígono.

7) (IME-84) a) São dados um cone de revolução de vértice  $V$ , cuja geratriz faz com o eixo do cone um ângulo  $\beta$  e uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$ .

(1) Mostre que esta elipse pode ser sempre obtida como seção plana do cone dado.

(2) Sendo  $AB$  o traço do plano secante com o plano meridiano  $AVB$ , que  $l$ he é perpendicular, demonstre a relação  $VA \cdot VB = b^2 \operatorname{cosec}^2 \beta$ .

b) Em uma hipérbole  $(h)$  são dados: um foco  $F$ , uma assíntota  $(\ell)$  e uma tangente  $(t)$ . Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



- d) A é inversível apenas para x da forma  $(2k + 1)\pi$ , k inteiro;  
e) A é inversível apenas para x da forma  $2k\pi$ , k inteiro.

15) (ITA-90) Sejam A, B e C matrizes quadradas  $n \times n$  tais que A e B são inversíveis e  $ABCA = A^t$ , onde  $A^t$  é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:

- a) C é inversível e  $\det C = \det(AB)^{-1}$ ;  
b) C não é inversível pois  $\det C = 0$ ;  
c) C é inversível e  $\det C = \det B$ ;  
d) C é inversível e  $\det C = (\det A)^2 \cdot \det B$ ;  
e) C é inversível e  $\det C = \frac{\det A}{\det B}$ .

Nota:  $\det X$  denota o determinante da matriz quadrada X.

16) (ITA-90) Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um qualquer dos sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguintes afirmações:

- I- Dois sistemas de equações lineares  $3 \times 3$ , ambos homogêneos, são equivalentes.  
II- Dois sistemas de equações lineares,  $3 \times 3$ , ambos indeterminados, não são equivalentes.  
III- Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 8 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:

- a) As três afirmações são verdadeiras;  
b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;  
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;  
d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;  
e) As três afirmações são falsas.

17) (ITA-90) Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dado por

$$\begin{cases} a_1x_1 + (a_1 + 1)x_2 + \dots + (a_1 + n - 1)x_n = 0 \\ a_2x_1 + (a_2 + 1)x_2 + \dots + (a_2 + n - 1)x_n = 0 \\ \dots \\ a_nx_1 + (a_n + 1)x_2 + \dots + (a_n + n - 1)x_n = 0 \end{cases}$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais dados. Sobre a solução deste sistema podemos afirmar que:

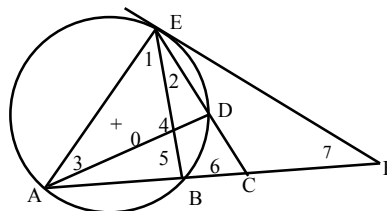
- a) Se  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  o sistema possui uma única solução;  
b) Se  $a_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  o sistema possui uma única solução;  
c) Se  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  o sistema é impossível;  
d) Se  $a_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  o sistema é impossível;  
e) O sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números  $a_1, \dots, a_n$  dados.

18) (ITA-90) Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois

marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.

Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de  $29/17$  então o número de moedas que havia originalmente no baú era:  
a) 99    b) 95    c) 135    d) 87    e) n.d.a.

19- (ITA-90) Na figura abaixo O é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por  $49^\circ, 18^\circ, 34^\circ$ , determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.  
a)  $97^\circ, 78^\circ, 61^\circ, 26^\circ$     b)  $102^\circ, 79^\circ, 58^\circ, 23^\circ$   
c)  $92^\circ, 79^\circ, 61^\circ, 30^\circ$     d)  $97^\circ, 79^\circ, 61^\circ, 27^\circ$   
e)  $97^\circ, 80^\circ, 62^\circ, 29^\circ$



20) (ITA-90) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações  $3x - 4y + 12 = 0$  e  $3x - 4y + 4 = 0$ . Considere ( $\ell$ ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve ( $\ell$ ) é dada por:

- a)  $3x - 4y + 8 = 0$     b)  $3x + 4y + 8 = 0$     c)  $x - y + 1 = 0$   
d)  $x + y = 0$     e)  $3x - 4y - 8 = 0$