2.4.6. Produto dos n Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica

Suponha que (A_n) é uma progressão geométrica. Seja P_n o produto dos n primeiros termos da seqüência (A_n), ou seja, $P_n = A_1.A_2.A_3...A_{n-2}.A_{n-1}.A_n$.

Invertendo a ordem dos termos nesta multiplicação obtemos: $P_n = A_n.A_{n-1}.A_{n-2}...A_3.A_2.A_1$.

Multiplicando termo a termo as duas expressões que fornecem P_n:

$(P_n)^2 = (A_1.A_n)(A_2.A_{n-1})(A_3.A_{n-2})...(A_n.A_1)$

Sabemos que em uma PG: $A_1.A_n = A_2.A_{n-1} = A_3.A_{n-2} = ... = A_k.A_{n-k+1}$. Assim:

$$(P_n)^2 = \underbrace{(A_1.A_n)(A_1.A_n)(A_1.A_n)...(A_1.A_n)}_{\text{n parcelas}} \Rightarrow \boxed{P_n = \sqrt{(A_1.A_n)^n}}$$

Também podemos escrever P_n em função do primeiro termo e da razão:

$$P_n = \left(A_1.A_n\right)^{n/2} = \left(A_1.A_1q^{n-1}\right)^{n/2} = \left(A_1^2.q^{n-1}\right)^{n/2} \Rightarrow \boxed{P_n = A_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Exemplos:

1) (UFRJ-2001) Seja $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ uma seqüência infinita de números reais. Sabendo que $x_0 = 10$ e que os logaritmos decimais $a_0 = \log x_0$, $a_1 = \log x_1$, ..., $a_n = \log x_n$, ... formam uma PG de razão 1/2, calcule o valor limite do produto $P_n = x_0x_1x_2...x_n$ quando n tende a infinito.

Solução:

O termo geral da PG é igual a $a_n = a_0.q^n = \log_{10} 10.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

Logo: $a_n = \log_{10} x_n \Rightarrow x_n = 10^{a_n} = 10^{\frac{1}{2^n}}$.

Quando n tende a infinito:

$$P_\infty = x_0x_1x_2x_3... = 10^{\frac{1}{2^0}}.10^{\frac{1}{2^1}}.10^{\frac{1}{2^2}}.10^{\frac{1}{2^3}}... = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...} = 10^{\frac{1}{1-(1/2)}} = 10^2 = 100.$$

2) (ITA-89) Numa progressão geométrica de razão ***q*** sabemos que $\boldsymbol{a_1 = 1/q}$, $\boldsymbol{a_1a_n} = (2/3)^5$ e o produto dos ***n*** primeiros termos é $\boldsymbol{q^{20}}$. Então a soma dos ***n*** primeiros termos é igual a:

a) $\frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ b) $\frac{1}{2}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ c) $\frac{1}{4}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ d) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ e) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^8}$

Solução:

Se a_1 é igual a 1/q, então da PG é dada por: $\left(\frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, ...\right)$, onde o termo geral é $a_n = q^{n-2}$.

Note que: $(P_n)^2 = (a_1a_n)^n \Rightarrow q^{40} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5n} \Rightarrow q^{40/n} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (1)

Igualando (1) e (2): $a_1a_n = \frac{1}{q}.q^{n-2} = q^{n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (2)

Logo: $q^{n-3} = q^{40/n} \overset{q\neq 0, q\neq 1}{\Rightarrow} n-3 = \frac{40}{n} \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+5) = 0 \overset{n>0}{\Rightarrow} n = 8$.

Substituindo n = 8 em (2): $q^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$.

Conseqüentemente: $S_8 = \frac{a_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{(3/2)[(2/3)^8-1]}{(2/3)-1} = \frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$.

4.14. PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

No capítulo 1, quando enunciamos o princípio da adição, colocamos que se uma decisão d_1 pode ser tomada de n_1 maneiras, a decisão d_2 poder ser tomada de n_2 maneiras e as decisões são independentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 ou d_2 é $n_1 + n_2$. Em linguagem de conjuntos, se $A \cap B = \varnothing$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Mas o que ocorre se $A \cap B \neq \varnothing$? Como dentro de $n(A)$ o valor de $n(A \cap B)$ é contado uma vez e dentro de $n(B)$ o valor de $n(A \cap B)$ é contado novamente uma vez, então o número $n(A) + n(B)$ possui contado duas vezes o valor de $n(A \cap B)$. Como devemos contar apenas uma vez o valor de $n(A \cap B)$, então podemos afirmar que, se $A \cap B \neq \varnothing$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Para três conjuntos, disjuntos aos pares, podemos fazer o seguinte:

$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A\cup B) + n(C) - n((A\cup B)\cap C) \Rightarrow$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - (n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)) \Rightarrow$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Vamos agora generalizar esta idéia. Para $1 \leq k \leq n$, definimos $I_{n,k} = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} n(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

Vamos provar, por indução finita, que $n(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k}$. O caso em que n = 1 é trivial e para n = 2 e n = 3 já foi demonstrado. Vamos assumir que a fórmula seja válida para um determinado valor de n. Então:

$$(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) = n(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + n(A_{n+1}) - n((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}) =$$
$$= n(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + n(A_{n+1}) - n((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k} + n(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} n(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{n+1}) \right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n+1,k}$$

Assim, por indução, segue que a fórmula $n(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k}$ é válida.

Exemplos:

1) Seja S = {1, 2, ..., 500}. Determine o número de inteiros em S que são divisíveis por 2, 3 ou 5.

Solução:

Sejam: A_2 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 2; A_3 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 3; A_5 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 5.

Inicialmente, podemos notar que a quantidade de números entre 1 e n, inclusive, que são divisíveis por k é igual à parte inteira do número $\frac{n}{k}$. Assim:

i) Como 500/2 = 250, então entre 1 e 500, inclusive, existem 250 números divisíveis por 2.
ii) Como 500/3 = 166,66..., então entre 1 e 500, inclusive, existem 166 números divisíveis por 3.
iii) Como 500/5 = 100, então entre 1 e 500, inclusive, existem 100 números divisíveis por 5.
iv) Como 500/6 = 83,33..., então entre 1 e 500, inclusive, existem 83 números divisíveis por 6.
v) Como 500/10 = 50, então entre 1 e 500, inclusive, existem 50 números divisíveis por 10.
vi) Como 500/15 = 33,33..., então entre 1 e 500, inclusive, existem 33 números divisíveis por 15.
vii) Como 500/30 = 16,66..., então entre 1 e 500, inclusive, existem 16 números divisíveis por 30.

Pelo princípio da Inclusão-Exclusão:

$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$

$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 250 + 166 + 100 - 83 - 50 - 33 + 16 = 366.$

14) (Olimpíada da Holanda-92) Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

Solução:

Existem quatro diferentes possibilidades do produto valer 36:

i) $\{1, 1, 6, 6\}$: ocorre em $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras

ii) $\{2, 2, 3, 3\}$: ocorre em $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras

iii) $\{1, 4, 3, 3\}$: ocorre em $\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras

iv) $\{1, 2, 3, 6\}$: ocorre em $4! = 24$ maneiras

Desta forma, a probabilidade do produto ser 36 é $p = \dfrac{6+6+12+24}{6^4} = \dfrac{1}{27}$.

15) (AIME-98) Nove cartões numerados com 1, 2, 3, ... , 9 são aleatoriamente divididos entre três pessoas, cada um recebendo três cartões. Determine a probabilidade que a soma dos números dos cartões de cada pessoa seja um número ímpar.

Solução:

Seja A o evento que consiste em separar os 9 números em 3 ternos de modo que a soma dos números dos ternos seja ímpar. O espaço amostral é formado por todos os conjuntos de 3 ternos que podemos formar com nove primeiros inteiros positivos. Para o cálculo de $n(\Omega)$ devemos inicialmente escolher os três números que ficarão com a primeira pessoa, depois escolher os três números que ficarão com a segunda pessoa e finalmente escolher os 3 números que ficarão com a terceira pessoa.

Assim, temos que $n(\Omega) = C_{9,3}.C_{6,3}.C_{3,3} = 84.20.1 = 1680$.

Como de 1 a 9 existem 5 inteiros ímpares e 4 pares a única possibilidade de que a soma 3 ternos de números seja ímpar é que um deles receba 3 números ímpares, outro receba um número ímpar e dois pares e o último receba também um número ímpar e dois pares.

Temos o seguinte esquema de distribuição dos números:

$$\boxed{I \mid I \mid I} \qquad \boxed{I \mid P \mid P} \qquad \boxed{I \mid P \mid P}$$

Deste modo, $n(A) = (C_{5,3})(C_{2,1}.C_{4,2})(C_{1,1}.C_{2,2}) = (10)(2.6)(1.1) = 120$.

Portanto: $p_A = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{1680} = \dfrac{1}{14}$.

16) (Olimpíada da Bélgica-2001) Em um programa de TV três homens escolhem, independentemente, suas mulheres favoritas entre três mulheres e, ao mesmo tempo, estas três mulheres escolhem seus homens favoritos. Se um homem e uma mulher escolhem um ao outro, então eles ganham uma viagem. Qual a probabilidade que o programa distribua três viagens?

a) 0,2% b) 0,8% c) 2,5% d) 4,0% e) 16,7%

Solução:

Sejam os homens dados pelas letras A, B e C e as mulheres dadas pelas letras a, b e c. Vamos organizar o espaço amostral de modo que seus elementos sejam da forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde:

x_1 = mulher escolhida pelo homem A; x_2 = mulher escolhida pelo homem B; x_3 = mulher escolhida pelo homem C; x_4 = homem escolhido pela mulher a; x_5 = homem escolhido pela mulher b; x_6 = homem escolhido pela mulher c. Como cada x_i possui 3 possibilidades de escolha, então $n(\Omega) = 3^6$.

Seja A o evento pedido no enunciado. As três passagens serão distribuídas nos casos em que as letras da seqüência x_1-x_2-x_3 sejam todas distintas e sejam as minúsculas das letras da seqüência x_4-x_5-x_6. Por exemplo, se as escolhas dos homens, nesta ordem, sejam b-a-c, então as escolhas das mulheres devem ser, nesta ordem, B-A-C. Portanto, uma vez definida a seqüência x_1-x_2-x_3 (com letras distintas), a seqüência x_4-x_5-x_6 já está definida. Concluímos, então, que $n(A) = 3!$. $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3!}{3^6} \cong 0,8\%$

II. Autovalor e Autovetor de uma matriz quadrada
2.1. Vetores fixos ou invariantes.

Def.1: Dada uma matriz real A = $(a_{aj})_{nxn}$, um vetor coluna X_{nx1} é dito um vetor fixo ou invariante de A se AX = X.

Ex.1: Dada $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qualquer vetor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é um vetor fixo de I_2 pois $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

OBS: Procure justificar porque $X_{nx1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **é um vetor fixo de qualquer matriz** A_{nxn}

2.2. Autovalor e Autovetor:

Def.2: Seja uma matriz real quadrada A_{nxn}. Se existirem um $\lambda \in \Re$ e um vetor coluna X_{nx1}, não nulo tais que AX = $\lambda\mathbf{X}$, diremos que λ é um autovalor (valor próprio ou valor característico) de A e X é um autovetor (vetor próprio ou vetor característico) de A associado a λ.

Ex1: Seja A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ segue-se que 2 é o autovalor de A e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor 2.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Se X é um autovetor de A associado a um autovalor λ, então $\alpha\,.\,x$ com $\alpha \in \Re^*$ também o será.

2.3. Polinômio e equação característica.

Sejam A_{nxn}, λ um autovalor de A e X_{nx1} um autovetor de A associado a λ. Então:

$$AX = \lambda X - AX = 0 \to (\lambda I - A)X = 0 \to \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots\dots\dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots\dots\dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

A expansão deste determinante nos fornece P(λ), conhecido como "polinômio característico" de A e P(X) = 0 chama-se "equação característica" de A e suas raízes características ou autovalores de A.

Ex. 1: Seja A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos obter:

1) Seu polinômio característico.
2) Sua equação característica.
3) Os autovalores de A.

Solução:

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Como queremos solução não triviais temos que:

$$\to \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$