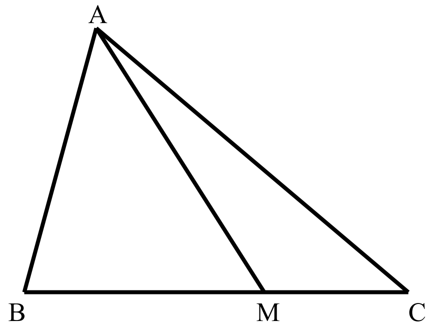
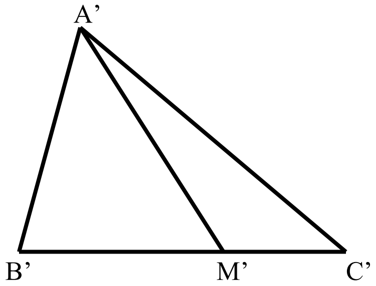
2.2.7) Teorema: A razão entre os comprimentos de duas cevianas homólogas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Demonstração:





Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos semelhantes com razão de semelhança igual a k, com A' correspondente a A, B' correspondente a B e C' correspondente a C. Considere o ponto M $\in$ BC e o ponto M' $\in$ B'C' de modo que $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{B'M'}{C'M'} = m$.

$$\frac{BM}{CM} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{BM + CM}{CM} = m + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{CM} = m + 1 \quad (1)$$

Analogamente: $\dfrac{B'C'}{C'M'} = m + 1 \quad (2)$

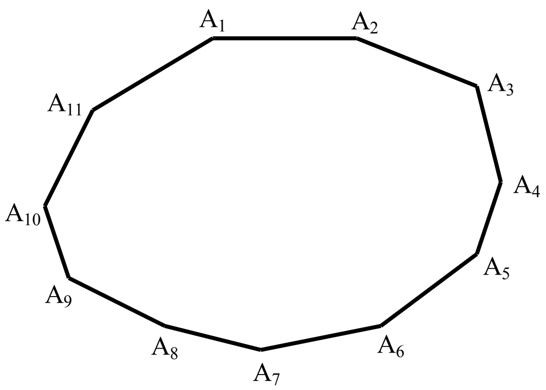
$$(1) \text{ e } (2) \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{CM} = \frac{B'C'}{C'M'} \quad \Rightarrow \quad \frac{CM}{C'M'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

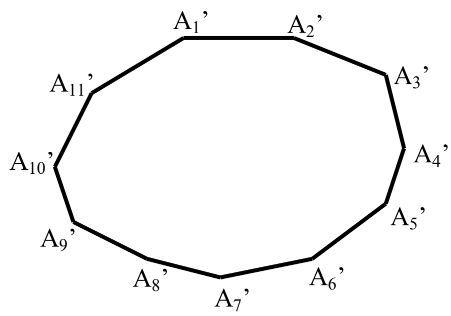
Uma vez que $\dfrac{CM}{C'M'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$ e $\angle MCA = \angle M'C'A'$ então temos que $\Delta AMC \sim \Delta A'M'C' \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AM}{A'M'} = k$.

Como conseqüência deste teorema, temos que em dois triângulos semelhantes a razão entre duas medianas homólogas, duas alturas homólogas e duas bissetrizes homólogas é igual a razão de semelhança entre esses dois triângulos.

2.3) SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

2.3.1) Definição: Dois polígonos são semelhantes se e somente se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados correspondentes forem proporcionais.



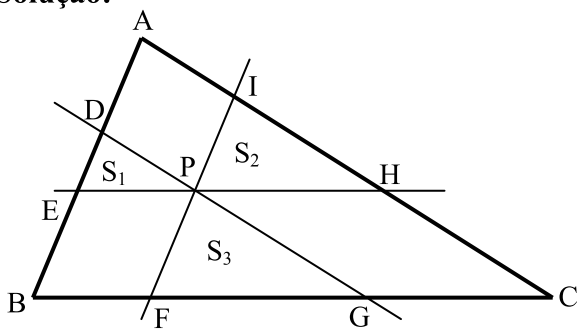


Por exemplo, analisando os polígonos acima, considerando que o vértice A_i é correspondente ao vértice A_i' ($1 \leq i \leq 11$), teremos que os dois polígonos são semelhantes se e somente se $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_1'$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{A}_2'$, $\hat{A}_3 \equiv \hat{A}_3'$, ..., $\hat{A}_{11} \equiv \hat{A}_{11}'$ e $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{A_1'A_2'} = \dfrac{\overline{A_2A_3}}{A_2'A_3'} = ... = \dfrac{\overline{A_{11}A_1}}{A_{11}'A_1'} = k$, onde k é a razão de semelhança entre os dois polígonos.

Observe que no caso da semelhança entre triângulos não é necessário analisar separadamente a congruência entre os ângulos correspondentes e a proporção entre os lados homólogos pois, no caso específico de triângulos, a ocorrência de uma destas condições de semelhança implica na outra. Isto acontece porque uma vez definidos os três lados de um triângulo (satisfazendo as desigualdades triangulares), existe somente um triângulo com estes lados. O mesmo não ocorre com os outros polígonos, pois com os mesmos comprimentos dos lados existem infinitas possibilidades para as configurações dos polígonos.

14) ABC é um triângulo e P um ponto no seu interior. Paralelas aos lados contendo P dividem o triângulo em 6 partes das quais 3 são triângulos de área S_1, S_2 e S_3. Provar que a área S de ABC é dada por $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$.

Solução:



Como DG || AC, IF || AB e EH || BC $\Rightarrow$ $\Delta DEP \sim \Delta PFG \sim \Delta IPH \sim \Delta ABC$

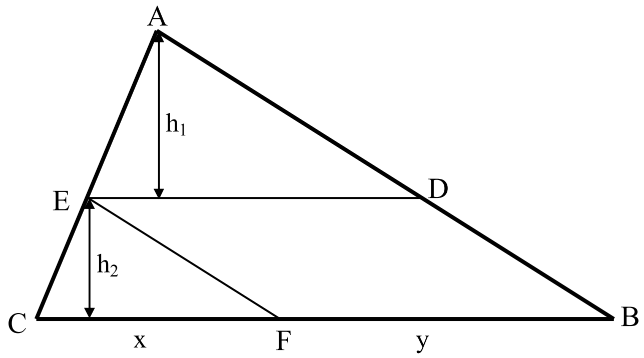
Assim: $\dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{EP}{BC}\right)^2$ $\dfrac{S_2}{S} = \left(\dfrac{PH}{BC}\right)^2$ $\dfrac{S_3}{S} = \left(\dfrac{FG}{BC}\right)^2$

Portanto: $\sqrt{\dfrac{S_1}{S}} + \sqrt{\dfrac{S_2}{S}} + \sqrt{\dfrac{S_3}{S}} = \dfrac{EP + PH + FG}{BC} = 1 \Rightarrow$

$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$

15) Um ponto E é escolhido sobre o lado AC de um triângulo ABC. Por E traçamos duas retas DE e EF paralelas aos lados BC e AB, respectivamente; D e F são pontos em AB e BC, respectivamente. Prove que $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$.

Solução:



Como ED // FB e EF // DB então ED = FB = y.
Traçando FD, dividimos BDEF em dois triângulos congruentes, cada um de área $y.h_2/2$.
Assim, $S_{BDEF} = y.h_2$.
Por outro lado, $S_{ADE} = y.h_1/2$ e $S_{EFG} = x.h_2/2$.
Desde que ΔADE e ΔEFC são semelhantes:

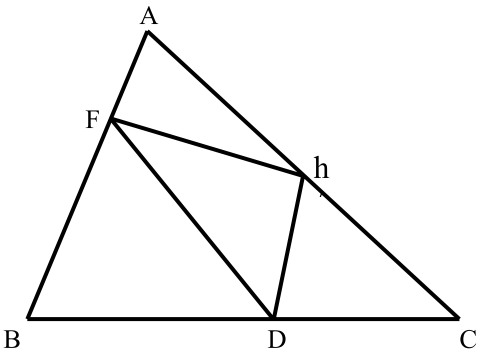
$\dfrac{y}{x} = \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow y.h_2 = x.h_1$.

Logo: $S_{ADE}.S_{EFG} = \dfrac{y.h_1}{2}\dfrac{x.h_2}{2} = \dfrac{(y.h_2)(x.h_1)}{4} \Rightarrow$

$4.S_{ADE}.S_{EFG} = (y.h_2)^2 = (S_{BDEF})^2 \Rightarrow S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$

16) Pontos D, E e F são escolhidos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, de modo que os triângulos AFE, BDF, CED e DEF possuem áreas iguais. Prove que D, E e F são os pontos médios dos lados de ΔABC.

Solução:



Suponha que BF/AB = r, CD/BC = p e AE/AC = q.

$\dfrac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{(CE.CD.\text{sen}\hat{C})/2}{(AC.BC.\text{sen}\hat{C})/2} = \dfrac{CE}{AC}\dfrac{CD}{BC} = (1-q)p$.

Como as áreas de AFE, BDF, CED e DEF são iguais a um quarto da área de ABC, então $p(1 - q) = 1/4$ (1)
Analogamente: $q(1 - r) = 1/4$ (2) $r(1 - p) = 1/4$ (3)

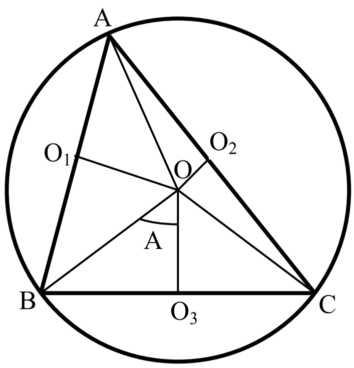
Desenvolvendo (1) obtemos $q = \dfrac{4p-1}{4p}$.

Substituindo em (2): $\dfrac{4p-1}{4p}(1-r) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow r = \dfrac{3p-1}{4p-1}$.

Substituindo em (3): $\dfrac{3p-1}{4p-1}(1-p) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow (12p - 4)(1 - p) = 4p - 1 \Rightarrow 3(4p^2 - 4p + 1) = 0 \Rightarrow$
$(2p - 1)^2 = 0 \Rightarrow p = 1/2 \Rightarrow q = 1/2$ e $r = 1/2 \Rightarrow$ D, E e F são os pontos médios de ΔABC.

7.5.6) Teorema de Carnot: "Sejam ABC um triângulo acutângulo e O centro da circunferência circunscrita a ABC. Se por O traçam-se perpendiculares aos lados de ABC, intersectando AB em O_1, AC em O_2 e BC em O_3, então $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$."

Demonstração:



a) Inicialmente note que $\angle BOC = 2.\angle BAC = 2A$

ΔBOC é isósceles $\Rightarrow$ OO_3 é altura e bissetriz $\Rightarrow$

$\angle BOO_3 = A$ $\Rightarrow$ $OO_3 = R.\cos A$

Analogamente: $OO_2 = R.\cos B$ $\quad OO_1 = R.\cos C$

A área de ΔBOC é dada por $S(\Delta BOC) = a.OO_3/2 = (a.R.\cos A)/2$

Analogamente $S(\Delta AOB) = (c.R.\cos C)/2$ e $S(\Delta AOC) = (b.R.\cos B)/2$

Desta forma a área de ΔABC é dada por:

$S = (a.R.\cos A)/2 + (b.R.\cos B)/2 + (c.R.\cos C)/2 \Rightarrow$

$S = R(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)/2$

Em ΔABC temos que:

$a = b.\cos C + c.\cos B \quad b = a.\cos C + c.\cos A \quad c = a.\cos B + b.\cos A$

Somando estas equações:

$a + b + c = (b + c).\cos A + (a + c).\cos B + (a + b).\cos C \Rightarrow$

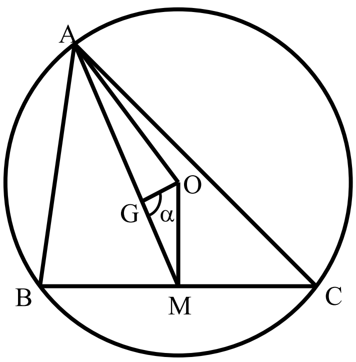
$a + b + c = (a + b + c).\cos A + (a + b + c).\cos B + (a + b + c).\cos C - a.\cos A - b.\cos B - c.\cos C \Rightarrow$

$(a + b + c) = (a + b + c)(\cos A + \cos B + \cos C) - (a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) \Rightarrow$

$2p = 2p\left(\frac{OO_3}{R} + \frac{OO_2}{R} + \frac{OO_1}{R}\right) - \frac{2S}{R} \Rightarrow pR = p(OO_1 + OO_2 + OO_3) - p.r \Rightarrow OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$

7.5.7) Teorema: "Se, num triângulo ABC, O é o centro do círculo circunscrito; G é o ponto de interseção das medianas; a, b e c são os lados e R é o raio do círculo circunscrito, então $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$."

Demonstração:



Como ΔOMC é retângulo: $OM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$.

Lei dos Cossenos em ΔOGM: $OM^2 = OG^2 + GM^2 - 2.OG.GM.\cos\alpha \Rightarrow$

$R^2 - \frac{a^2}{4} = OG^2 + \frac{m_a^2}{9} - 2.OG.\frac{m_a}{3}.\cos\alpha \quad (1)$

Lei dos Cossenos em ΔOGA:

$OA^2 = OG^2 + AG^2 - 2.OG.AG.\cos(180^o - \alpha) \Rightarrow$

$R^2 = OG^2 + \frac{4m_a^2}{9} + 2.OG.\frac{2m_a}{3}.\cos\alpha \Rightarrow$

$\frac{R^2}{2} = \frac{OG^2}{2} + \frac{2m_a^2}{9} + 2.OG.\frac{m_a}{3}.\cos\alpha \quad (2)$

Somando (1) e (2): $\frac{3R^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3.OG^2}{2} + \frac{m_a^2}{3} \Rightarrow$

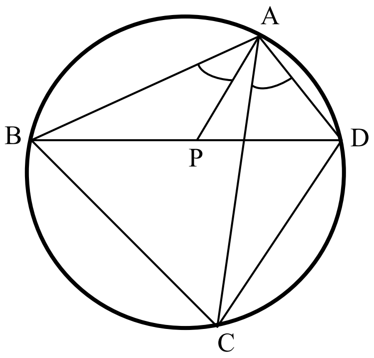
$\frac{3R^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3.OG^2}{2} + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{6} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

7.5.8) Teorema de Euler: "Sejam O e I o circuncentro e o incentro, respectivamente, de um triângulo com raio do círculo circunscrito igual a R e raio do círculo inscrito igual a r.
Então $OI^2 = R^2 - 2Rr$."

Área e Relações Métricas nos Quadriláteros

8.1) TEOREMA DE PTOLOMEU: "Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos".

1ª Demonstração:



Sejam: AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p e BD = q.

Seja P o ponto sobre o BD tal que ∠BAP = ∠CAD.

Desde que ΔAPD ~ ΔABC: $\frac{PD}{b} = \frac{d}{p} \Rightarrow PD.p = b.d$ (1)

Como ΔAPB ~ ΔADC: $\frac{BP}{c} = \frac{a}{p} \Rightarrow BP.p = a.c$ (2)

Somando (1) e (2): $p(PD + BP) = a.c + b.d \Rightarrow \boxed{p.q = a.c + b.d}$

2ª Demonstração:

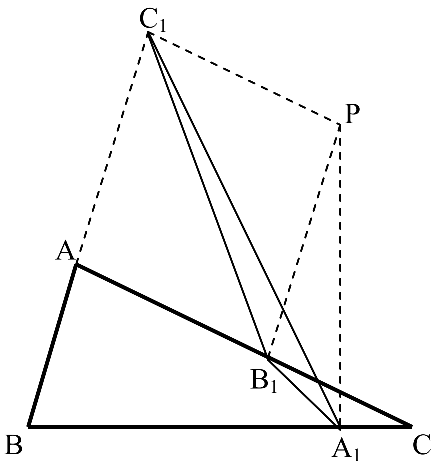
Em ΔABD e ΔBCD temos $q^2 = a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos \hat{A}$ e $q^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$.

Assim: $(bc + ad)q^2 = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad = (ab + cd)(ac + bd) \Rightarrow q^2 = \frac{ab + cd}{bc + ad}(ac + bd)$ (1)

Analogamente: $p^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)$ (2). Multiplicando (1) e (2) obtemos $\boxed{pq = ac + bd.}$

8.1.1) Desigualdade de Ptolomeu: "Se ABC é um triângulo e P é um ponto do plano de ΔABC, então AB.CP + BC.AP ≥ AC.BP. A igualdade ocorre se e somente o quadrilátero ABCP é inscritível."

Demonstração:



Por P trace perpendiculares aos lados BC, AC e AB, intersectando estes lados nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente.

Trace os segmentos de reta A_1C_1, A_1B_1 e B_1C_1.

Como $\angle AC_1P + \angle AB_1P = 90^o + 90^o = 180^o$, então o quadrilátero AB_1PC_1 é inscritível, sendo AP um diâmetro da circunferência circunscrita. Além do mais, $\angle PB_1A = 180^o - \angle B_1AC_1 = \hat{A}$.

Aplicando Lei dos Senos em ΔPB_1C_1 temos que: $\frac{B_1C_1}{\text{sen } \hat{A}} = AP$.

Como $\text{sen } \hat{A} = \frac{BC}{2R}$, então $B_1C_1 = \frac{BC.AP}{2R}$.

Analogamente, temos que $A_1C_1 = \frac{AC.BP}{2R}$ e $A_1B_1 = \frac{AB.CP}{2R}$

Como a menor distância entre dois pontos é em linha reta, então $A_1B_1 + B_1C_1 \geq A_1C_1 \Rightarrow$

$$\frac{AB.CP}{2R} + \frac{BC.AP}{2R} \geq \frac{AB.CP}{2R} \Rightarrow \boxed{AB.CP + BC.AP \geq AB.CP}$$

A igualdade ocorre se e somente se $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$, ou seja, se e somente se os pontos A_1, B_1 e C_1 estão alinhados, fazendo com que esta reta seja uma Reta de Simson e o ponto P pertença ao circuncírculo de ΔABC. Assim, o quadrilátero ABCP é inscritível e a Desigualdade de Ptolomeu se transforma no Teorema de Ptolomeu.

Perceba que a Desigualdade de Ptolomeu é um teorema bem mais geral que o Teorema de Ptolomeu. A Desigualdade de Ptolomeu permite descobrir se um quadrilátero ABCD é inscritível diretamente a partir dos valores dos lados e diagonais, sem que seja necessário fazer uma análise dos ângulos de ABCD. Para isto, basta que se verifique a igualdade AB.CD + BC.AD = AB.CD. Se por acaso ocorrer de AB.CP + BC.AP > AB.CP, então ABCD não é inscritível.